

WS モデルおよび修正 Configuration モデルで生成したネットワークの Uncorrelated 性について

谷聖一 研究室 新井 天馬

Tenma Arai

概要

有限ネットワーク上の情報伝播において、ネットワーク全体に情報が伝播されるまでの時間は、情報を持っている頂点が隣接頂点の中から情報の伝播先をどのように選択するか依存する。各頂点が記憶能力を持たず、情報を持っている頂点が単位時間に 1 つの隣接頂点にのみ情報を伝播するモデルにおいて、ネットワークが Uncorrelated 性を持つならば、次数の小さい頂点に優先的に情報を伝播する方法が、ネットワーク全体に情報が伝播されるまでの平均時間を最小にすることが証明されている。そこで本演習では、Uncorrelated 性を持つネットワークと持たないネットワークとの差はどこにあるのかを考察するため、スモールワールド性を持つがスケールフリー性を持たないネットワークを生成するモデルと、Uncorrelated 性を持つネットワークを生成するとされているモデルでネットワークを生成し、それらに対して情報伝播実験を行った。

1 はじめに

1.1 背景・目的

現実世界の現象の多くは、ネットワークとしてモデル化できる。モデル化したネットワークは非常に複雑なものが多いため、「複雑ネットワーク」と呼ばれる。例として WWW、食物網、路線図などがある。これらの複雑ネットワークには、共通する性質がいくつか存在することが様々な研究の結果明らかとなっている。1998 年のワッツとストロガッツの論文 [3] と 1999 年のバラバシとアルバートの論文 [4] が複雑ネットワーク研究の始まりとされる。それから今日まで、複雑ネットワーク研究は急激に発展している ([1])。

論文 [2] では以下が示された。

定理 1. 各頂点が記憶能力を持たず、情報を持っている頂点が単位時間に 1 つの隣接頂点にのみ情報を伝播するモデルにおいて、ネットワークが *Uncorrelated* 性を持つならば、ネットワーク全体に情報が伝播されるまでの平均時間は、情報を伝播する隣接頂点を選択する際に次数の小さい頂点を優先的に乱択する方法が最小となる。

[10] などの先行研究では、Configuration モデルなどで生成したネットワークで情報伝播実験を行い、定理 1 を適用させて、各ネットワークがどの程度 Uncorrelated 性を持つのかを調査した。調査したネットワークは全てスケールフリーネットワークであり、スモールワールドネットワークについて調査はされていなかった。

そこで本演習では、スケールフリー性を持たないがスモールワールド性を持つネットワークで情報伝播実験を行い、スモールワールドネットワークがどの程度 Uncorrelated 性を持つのかを調査する。スモールワールドネットワークを生成するモデルとして WS モデルがある。また、Uncorrelated 性を持つネットワークを生成するとされているモデルとして修正 Configuration モデルがある。そこで、この 2 つのネットワーク生成モデルを用いて情報伝播実験を行った。

1.2 構成

本稿は以下のような構成になっている。2 節では、ネットワークの数学的な定義を述べる。3 節では、本演習で用いた伝播モデルについて述べる。4 節では、複雑ネットワークの性質としてスケールフリー性とスモールワールド性について述べる。5 節では、Uncorrelated 性について述べる。6 節では、ネットワークの特徴量について述べる。7 節では、ネットワーク生成モデルについて述べる。8 節では、本演習の実験方法について述べる。9 節では、実験結果を示す。10 節では、考察を述べる。11 節では、今後の課題について述べる。

2 ネットワークの数学的な定義

本演習では、無向重みなしネットワークのみを扱う。ネットワークを G とするとその定義は、頂点集合 V と辺集合 E からなり、

$$G = (V, E)$$

と表す。また、頂点から出る辺の数を次数と呼び、頂点 v_i の次数を k_i で表す。

3 本演習で用いた伝播モデル

本演習で用いた伝播モデルの説明をする。用いた伝播モデルは、本演習の背景となった論文 [2] と同様である。

説明を行うにあたり、ソースノードとターゲットノードを以下のように定義する。

- ソースノード：情報を保持している頂点
- ターゲットノード：ソースノードから伝播先として選択された頂点

3.1 情報伝播のルール・制約

情報伝播のルールは以下の通りである。

1. 初期状態でのソースノードは 1 つ
2. ソースノードは隣接頂点のうちの 1 つをターゲットノードとして選択
3. ターゲットノードはソースノードになる
4. 全ての頂点がソースノードとなるまで、ステップ 2～3 を繰り返す

また、ターゲットノードの選択方法を決めるのに使える情報は以下の通りである。

- 各頂点が事前に保持している情報は、隣接頂点の次数のみ
- 各頂点は、ネットワーク全体の構造はわからない

3.2 ターゲットノードの選択方法

3.1 節より、ソースノードが使える情報は隣接頂点の次数のみである。したがって、ターゲットノードの選択方法は以下のようなものが考えられる。

1. 一様分布に従い乱択
2. 次数の大きな頂点を優先的に乱択
3. 次数の小さな頂点を優先的に乱択

また、ソースノード a が、隣接頂点の中からターゲットノードとして b を選択する確率は以下の通りである。

$$q(b; a) = \frac{w_b}{\sum_{i=1}^{k_a} w_{a_i}}$$

w_i は頂点 v_i の重み、 k_i は頂点 v_i の次数、 a_i は頂点 v_a の隣接頂点の i 番目である。上記の 3 つのターゲットノードの選択方法のいずれを用いるかによって w_i の値が以下のように変化する。

1. 一様分布に従い乱択：
 $w_i = \text{ある一定の値 (例えば 1)}$
2. 次数の大きな頂点を優先的に乱択：
 $w_i = \text{頂点 } v_i \text{ の次数}$
3. 次数の小さな頂点を優先的に乱択：
 $w_i = \text{頂点 } v_i \text{ の次数の逆数}$

4 複雑ネットワークの性質

多くの複雑ネットワークに共通する性質として、スケールフリー性とスモールワールド性がある。それぞれどのような性質であるかを以下に述べる。

4.1 スケールフリー性

スケールフリー性とは、次数分布がべき則に従うことをいう。数学的には、

$$p(k) \propto k^{-\gamma}$$

を満たしていることである ($\propto$ は比例を表し、 γ はべき指数と呼ぶ)。つまり、次数の小さい頂点の割合がかなり大きく、次数の大きい頂点の割合は、かなり小さいながらもそれなりに存在しているということである。

また、スケールフリー性を持つネットワークをスケールフリーネットワークと呼ぶ。現実世界のスケールフリーネットワークは、べき指数が $2 \leq \gamma \leq 3$ 程度であることが多い。「ネットワークにまつわる驚きの多くが、スケールフリー性から出てくる」([1])。スケールフリーネットワークの次数分布は、両対数グラフが直線となる。

スケールフリー性の主な性質として、スケール変換不変性がある。スケール変換不変性とは、スケールフリーネットワークの次数分布を、定数 a でスケール変換させた $p(ak)$ もべき則に従うことである。

4.2 スモールワールド性

スモールワールド性は、2 つの特徴を持つ。1 つ目のみを指すこともあるが、ここでは、2 つ揃ったものをスモールワールド性とする。

1 つ目が、ネットワーク内の任意の 2 頂点が、間にわずかな頂点を経由することで接続されること (6.1 節で説明する「平均距離」が小さい) である。

2 つ目は、よく「世間は狭い」と言われる「友達の友達は友達である」という関係がネットワーク内に多く見られること (6.2 節で説明する「クラスター係数」が大きい) である。

また、スモールワールド性を持つネットワークをスモールワールドネットワークという。

5 Uncorrelated 性

Uncorrelated 性とはネットワークにおける様々な研究で仮定される性質の 1 つであるが、論文や文献によって定義が異なる。「uncorrelated」の単語の意味は「無関係の」である。そこから Uncorrelated 性とは「局所性がなく、どこも同じような構造をしている」ことをいう。

本演習で用いた伝播モデルにおいて、ソースノード a によって隣接頂点 b がターゲットノードとして選択される確率は 3.2 節の $q(b; a)$ と定まる。また、全頂点の中から頂点 b がターゲットノードとして選択される確率は、頂点数を N とすると、

$$q_b = \frac{k_b w_b}{\sum_{i=1}^N k_i w_i}$$

となる。

定理 1 は、Uncorrelated ネットワークにおいては、 $q(b; a)$ と q_b が近似できること、つまり

$$q(b; a) \approx q_b$$

を用いて証明されている。

6 ネットワークの特徴量

ネットワーク解析においては、何らかの特徴を表す指標を用いられることがある。その指標のことをネットワーク特徴量という。ネットワーク特徴量には様々なものがあるが、ここでは本演習で用いた以下の 2 つのネットワーク特徴量の定義を説明する。

- 平均距離
- クラスター係数

6.1 平均距離

2 頂点 v_i と v_j の距離 $d(v_i, v_j)$ を、 v_i から v_j に最短経路で通る辺の数で定義する。するとネットワークの平均距離は、ネットワーク内の全ての 2 頂点間の距離の平均と定義できる。頂点数を N とすると、平均距離は、

$$L = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq N} d(v_i, v_j)$$

となる。

平均距離は、ネットワークのおおよその大きさを表す。平均距離が小さいとは、おおよそ $L \propto \log_2 N$ であることを指す。

6.2 クラスター係数

クラスター係数は、頂点ごとに定義される。簡単には、「ある頂点と隣接している頂点同士が隣接している割合」

を表す。ネットワーク全体のクラスター係数は、各頂点のクラスター係数の平均で定義される。頂点 v_i の次数を k_i とし、 t_i を頂点 v_i と隣接している頂点同士が隣接している数と定義する。そうすると、頂点 v_i のクラスター係数は、

$$C_i = \frac{t_i}{k_i(k_i - 1)/2}$$

となる。また、頂点数を N とすると、ネットワーク全体のクラスター係数は各頂点の平均なので、

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i$$

となる。

クラスター係数は、ネットワーク内の関係のおおよその密度を表すことができる。クラスター係数が高いとは、同じ次数列でランダムに作るネットワークより有意に大きいことをいう。

7 ネットワーク生成モデル

ネットワーク生成モデルは数多く存在するが、本演習ではスケールフリー性を持たないがスモールワールド性を持つネットワークを生成できる WS モデルと、Uncorrelated 性を持つネットワークを生成するとされるモデルである修正 Configuration モデルを用いた。

まず WS モデルについて述べる。次に Configuration モデルについて述べ、その上で修正 Configuration モデルについて述べる。

7.1 WS モデル

WS モデルは、1998 年にワッツとストロガッツにより発表されたネットワーク生成モデルである ([3])。簡単なアルゴリズムでスモールワールドネットワークを生成することができる。WS モデルのアルゴリズムを以下に示す ([1])。

1. 頂点数と平均次数 $\langle k \rangle$ を決め、拡張サイクルを作る。
2. 全ての辺から確率 p で辺を選び、端点のどちらから半々の確率で切り離す。
3. 切り離した各辺の新しい端点を全頂点の中から等確率で選び、繋げる。

拡張サイクルは、サイクル（円状に頂点を配置して隣にある頂点とだけ辺を繋いだもの）に、 $\langle k \rangle/2$ 個分隣の頂点にも辺を繋ぐことで作成できる。拡張サイクルの時点では、空間として距離が遠い 2 頂点はネットワークとしての距離も遠いので、平均距離は大きい。また、サイクルに追加した辺がクラスターを作るので全頂点のクラスター係数は同一で、ネットワーク全体としても大き

い. そこから, p の値を調整して辺を繋ぎかえると, 平均距離は小さくクラスター係数は大きいスモールワールドネットワークを作成できる ([1]).

また, 拡張サイクルの時点で全頂点の次数は一定である. そこから少数の辺を繋ぎかえると多少のばらつきは出るが, べき則には従わない. よって, スケールフリー性は持たない.

ステップ 3 では, 切り離れた各辺の新しい端点を全ての頂点から選ぶので, 自己ループ・多重辺ができる可能性がある. 本演習では, 自己ループ・多重辺を許す・許さないのどちらも生成した.

7.2 Configuration モデル

Configuration モデルは, 次数分布を任意に作れる, 生成されるネットワークは成長しない, などの特徴を持つネットワークを生成するモデルである ([5]). Configuration モデルのアルゴリズムを以下に示す ([1]).

1. 頂点数を決め, 次数分布を決める.
2. 次数分布に従って, 各頂点の次数を決める. これを, 次数列と呼ぶ.
3. ステップ 2 で決めた次数個の辺の片割れを各頂点に持たせ, 適当に配置する.
4. 辺の片割れを 2 つずつ繋いでいく.

ステップ 1 で次数分布を決める際に, べき則に従わせるとスケールフリーネットワークになる. 本演習では, スケールフリーネットワークのみを生成した.

ステップ 4 では全ての辺から 2 つを選ぶので自己ループ・多重辺ができる可能性がある. 本演習では, 自己ループ・多重辺を許す・許さないのどちらも生成した. また, 生成したネットワークが非連結になる可能性もある. その時は, ステップ 3 から処理し直す.

7.3 修正 Configuration モデル

Configuration モデルに修正を加え, Uncorrelated 性を持つネットワークを生成するための手法が提案された ([6]). ここでは, その手法について述べる.

修正 Configuration モデル

Configuration モデルのステップ 2 で次数列を発生させる際に全ての頂点の次数を, $k \leq N^{1/2}$ にカットオフする. (N は全頂点数)

この手法は, Uncorrelated 性を持つネットワークを生成できるとされているヒューリスティックである. この手

法により生成されたネットワークが, どの程度 Uncorrelated 性を持つかどうかの判定方法は未確立である.

8 実験方法

ターゲットノードの選択方法のうち, 「次数の小さい頂点を優先的に乱択する方法」を以下 RPC (Reverse Preferential Control) とする. また, 「自己ループ・多重辺を許す」を以下 alm (allow loop and multiple) とする.

本演習では, WS モデルおよび修正 Configuration モデルでネットワークを生成し, 情報伝播実験を行うことで各ネットワークの RPC 最速割合を出す. また, 各ネットワークのクラスター係数を計算し, RPC 最速割合との関係を求めた.

なお, ネットワーク生成, ネットワークの特徴量の計算, 情報伝播実験を行うプログラムは C++ で作成した. また, グラフ出力には gnuplot を使用した.

8.1 ネットワーク生成数

ネットワーク生成モデルは, WS モデル, WS モデル (alm), 修正 Configuration モデル, 修正 Configuration モデル (alm) の 4 つを用いた.

WS モデル, WS モデル (alm) は, 平均次数は 4, 8 の 2 種類, 繋ぎかえる辺を選ぶ確率 p は 0.01, 0.1 の 2 種類, 頂点数は 10000 の 1 種類の組み合わせで各生成パラメーターで 100 個ずつ, 合計 800 個ネットワークを生成した.

修正 Configuration モデル, 修正 Configuration モデル (alm) は, べき指数は 2.25, 2.5, 2.75, 3.0 の 4 種類, 頂点数は 10000 の 1 種類の組み合わせで各生成パラメーターで 100 個ずつ, 合計 800 個ネットワークを生成した.

8.2 情報伝播実験

本演習では, 以下の方法で生成パラメーターごとに情報伝播実験を 100 回行った.

入力: ネットワーク, 実験番号 i

処理: 本演習で用いた伝播モデルで, ランダムシードを i とし, 初期ソースノードを乱択し, 全ての頂点がソースノードとなるまで情報伝播をシミュレーションし, ソースノード数のステップごとの変化を記録

公平を期すために, 全ての実験において同じ実験番号の実験では同じランダムシードを用いた.

8.3 RPC 最速割合

各生成パラメーターの情報伝播実験の回数は、ネットワークが 100 個あり、そのそれぞれで 100 回ずつ情報伝播実験をするので、10000 回である。そのうち、RPC が最速になった割合を百分率で RPC 最速割合とし、生成パラメーターごとに RPC 最速割合と RPC 平均ステップ数と平均辺数の表を作成した。

8.4 クラスター係数と RPC 最速割合の関係

WS モデルにより大きいクラスター係数を持つネットワークを生成したため、クラスター係数に着目し RPC 最速割合との関係をグラフ化することで、クラスター係数と Uncorrelated 性の関係を考察した。

9 実験結果

9.1 情報伝播実験

情報伝播実験の結果の一部を、図 1～16 に示す。WS モデルの平均次数を $\langle k \rangle$ 、繋ぎかえる辺を選ぶ確率を p で表す。

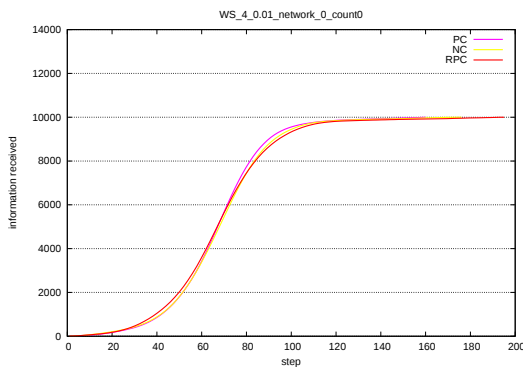


図 1: WS モデル $\langle k \rangle = 4, p = 0.01$

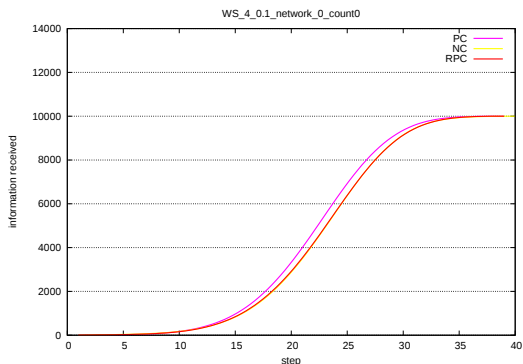


図 2: WS モデル $\langle k \rangle = 4, p = 0.1$

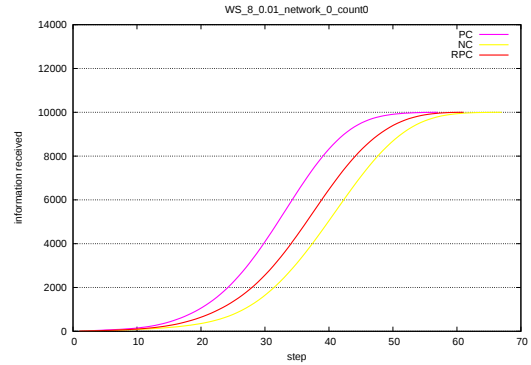


図 3: WS モデル $\langle k \rangle = 8, p = 0.01$

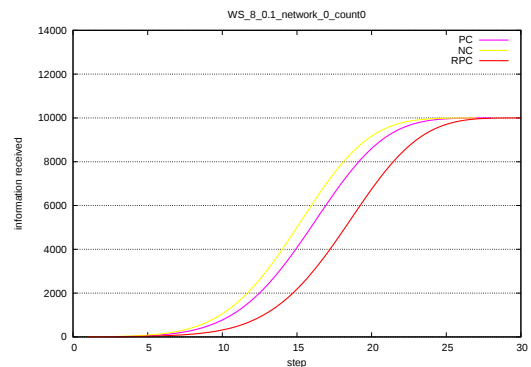


図 4: WS モデル $\langle k \rangle = 8, p = 0.1$

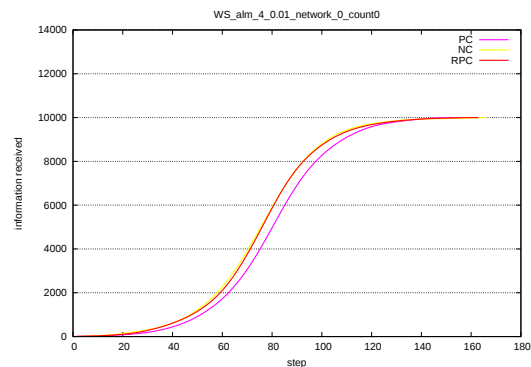


図 5: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 4, p = 0.01$

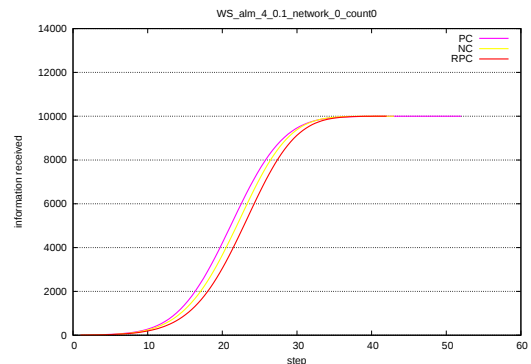


図 6: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 4, p = 0.1$

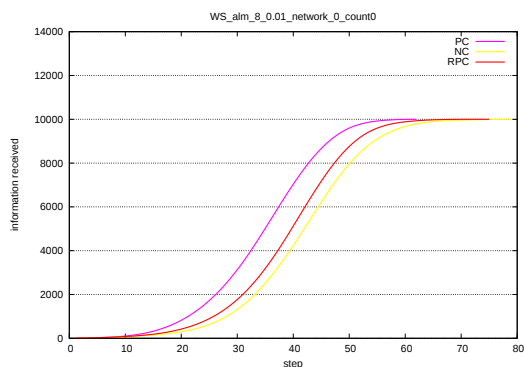


図 7: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 8, p = 0.01$

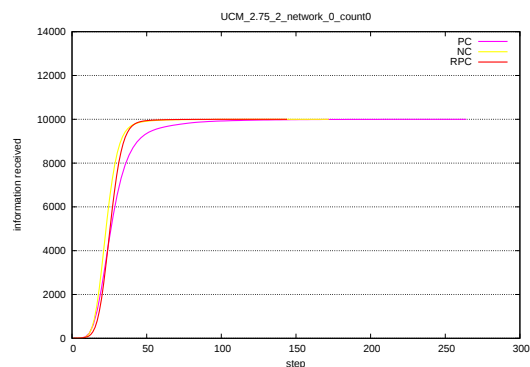


図 11: 修正 Configuration モデル ベキ指数 2.75

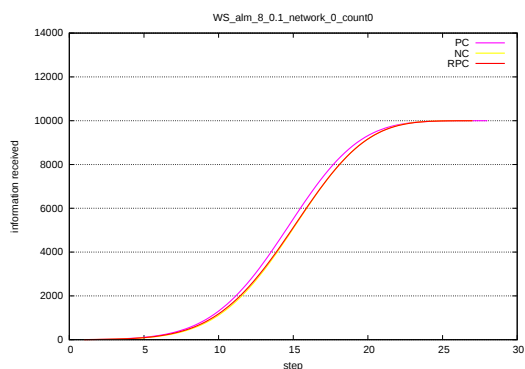


図 8: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 8, p = 0.1$

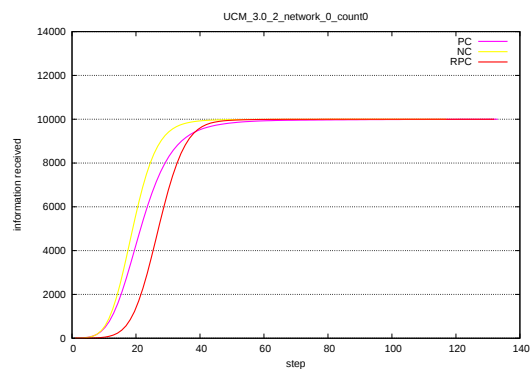


図 12: 修正 Configuration モデル ベキ指数 3.0

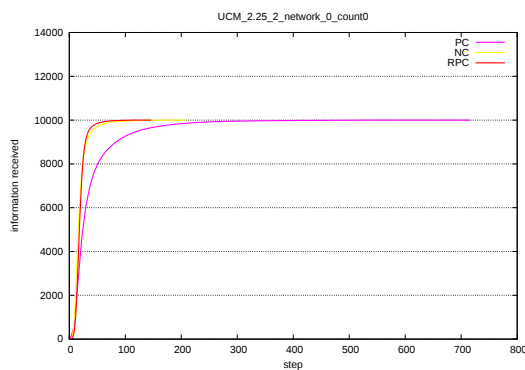


図 9: 修正 Configuration モデル ベキ指数 2.25

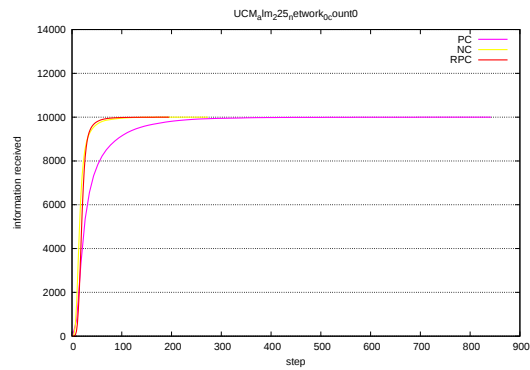


図 13: 修正 Configuration モデル (alm) ベキ指数 2.25

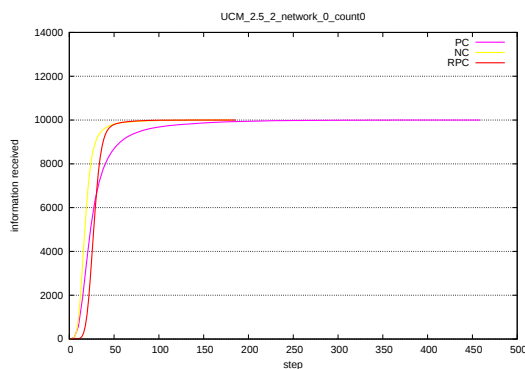


図 10: 修正 Configuration モデル ベキ指数 2.5

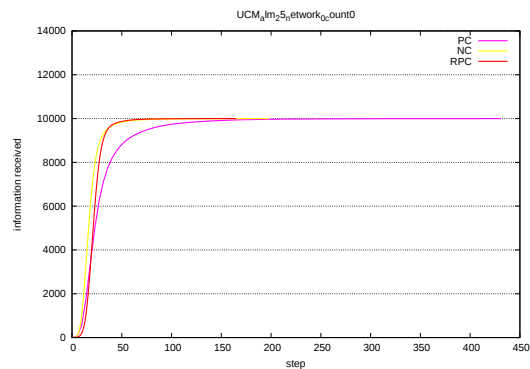


図 14: 修正 Configuration モデル (alm) ベキ指数 2.5

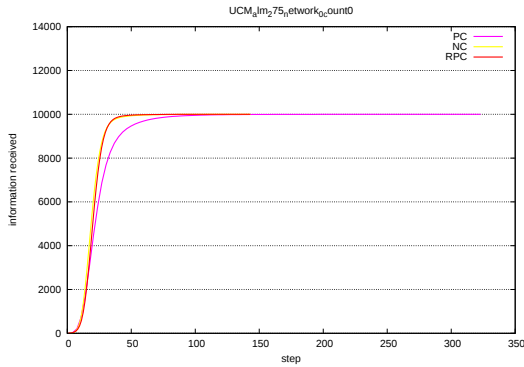


図 15: 修正 Configuration モデル (alm) べき指数 2.75

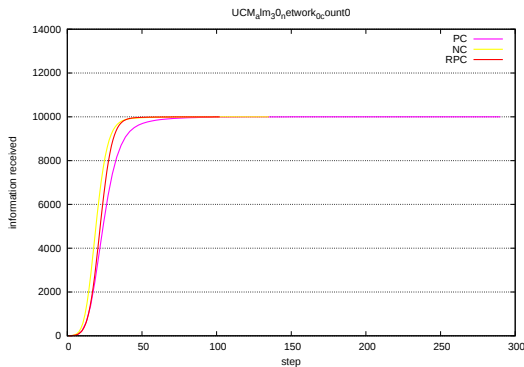


図 16: 修正 Configuration モデル (alm) べき指数 3.0

9.2 RPC 最速割合

RPC 最速割合, RPC 平均ステップ数, 平均辺数を表 1 に示す. 修正 Configuration モデルを, UCM (Uncorrelated Configuration Model) と表す.

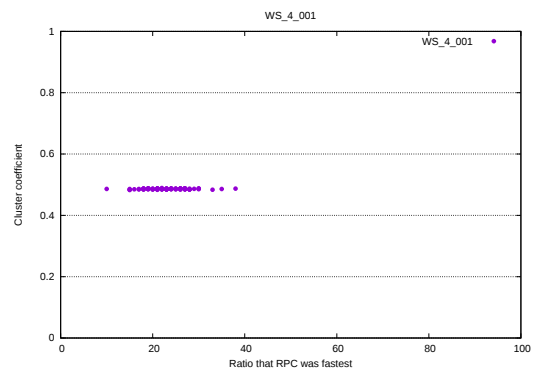
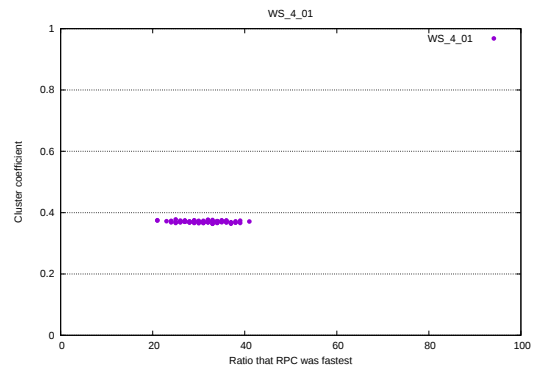
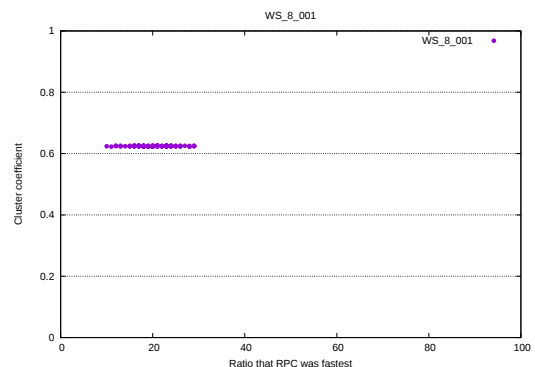
表 1: 情報伝播実験の結果

生成モデル	RPC 最速割合 (%)	RPC 平均 ステップ数	平均辺数
WS 4 0.01	22.91	153.45	20000
WS 4 0.1	30.88	42.47	20000
WS 8 0.01	20.17	69.37	40000
WS 8 0.1	32.27	28.91	40000
WS_alm 4 0.01	21.91	153.09	20000
WS_alm 4 0.1	31.24	42.55	20000
WS_alm 8 0.01	19.33	69.4	40000
WS_alm 8 0.1	32.09	28.91	40000
UCM 2.25	92.57	171.53	25500.63
UCM 2.5	83.35	156.3	20742.77
UCM 2.75	72.3	134.87	17721.78
UCM 3.0	62.7	107.53	15672.75
UCM_alm 2.25	93.04	170.32	25462.9
UCM_alm 2.5	82.36	156.01	20760.01
UCM_alm 2.75	73.31	133.88	17693.7
UCM_alm 3.0	63.71	109.8	15712.39

WS モデルでは, 全てのパラメーターで RPC 最速割合が最大とならなかった. 修正 Configuration モデルでは, 全てのパラメーターで RPC 最速割合が最大となったが, べき指数が大きくなっていくごとに RPC 最速割合はだんだん小さくなっている.

9.3 RPC 最速割合とクラスター係数の関係

縦軸にクラスター係数, 横軸に RPC 最速割合をとり, 各パラメーターのグラフを図 17~32 に示す. 各ネットワークごとに描画したので, 各グラフに 100 個の点がある.

図 17: WS モデル $\langle k \rangle = 4, p = 0.01$ 図 18: WS モデル $\langle k \rangle = 4, p = 0.1$ 図 19: WS モデル $\langle k \rangle = 8, p = 0.01$

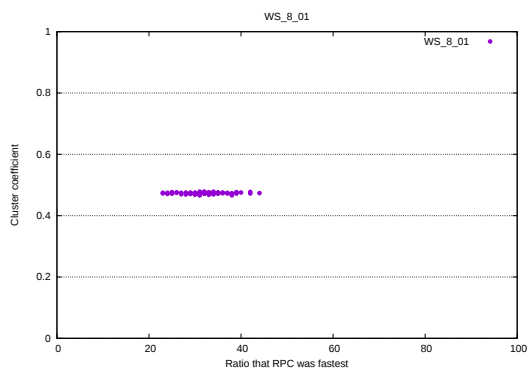


図 20: WS モデル $\langle k \rangle = 8, p = 0.1$

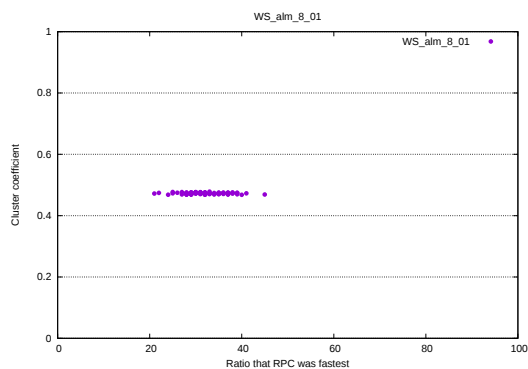


図 24: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 8, p = 0.1$

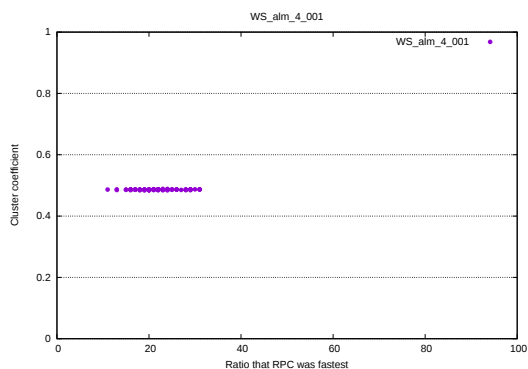


図 21: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 4, p = 0.01$

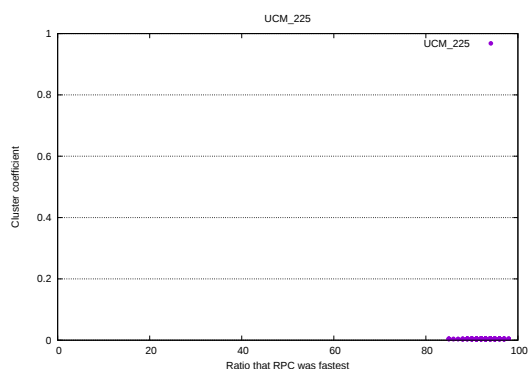


図 25: 修正 Configuration モデル べき指数 2.25

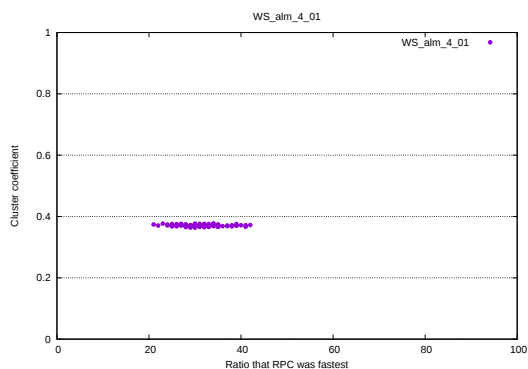


図 22: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 4, p = 0.1$

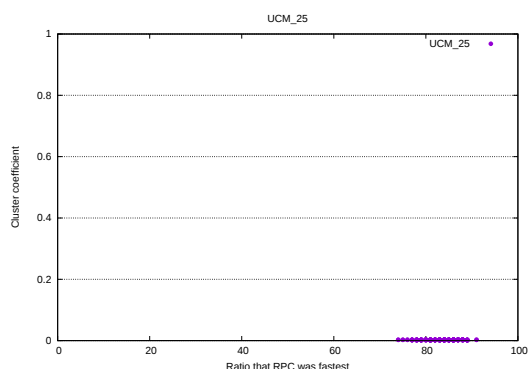


図 26: 修正 Configuration モデル べき指数 2.5

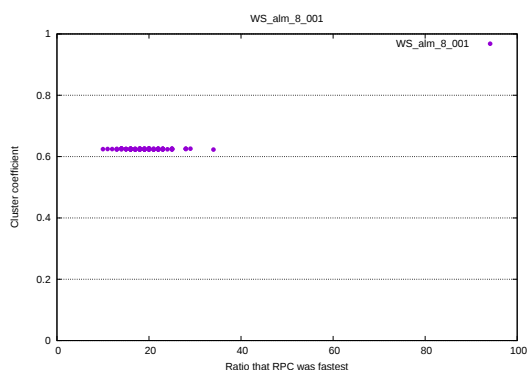


図 23: WS モデル (alm) $\langle k \rangle = 8, p = 0.01$

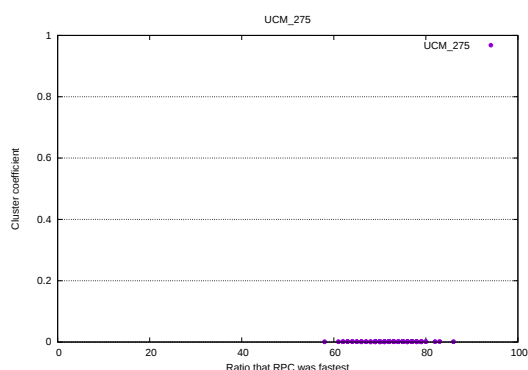


図 27: 修正 Configuration モデル べき指数 2.75

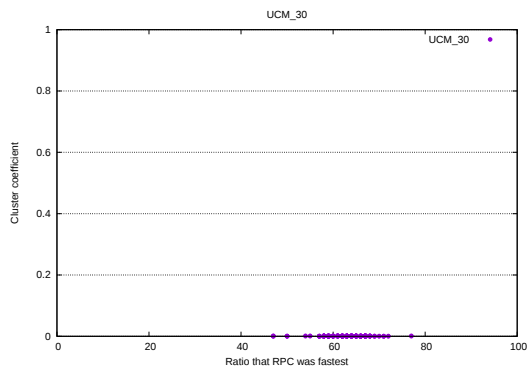


図 28: 修正 Configuration モデル べき指数 3.0

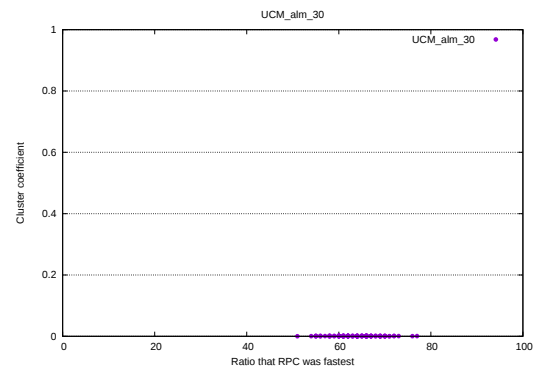


図 32: 修正 Configuration モデル (alm) べき指数 3.0

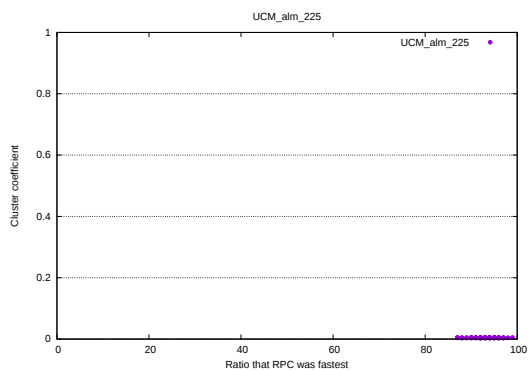


図 29: 修正 Configuration モデル (alm) べき指数 2.25

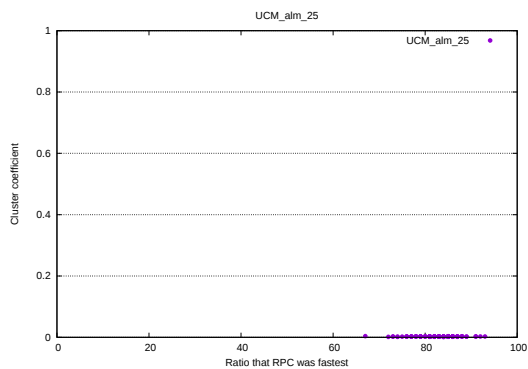


図 30: 修正 Configuration モデル (alm) べき指数 2.5

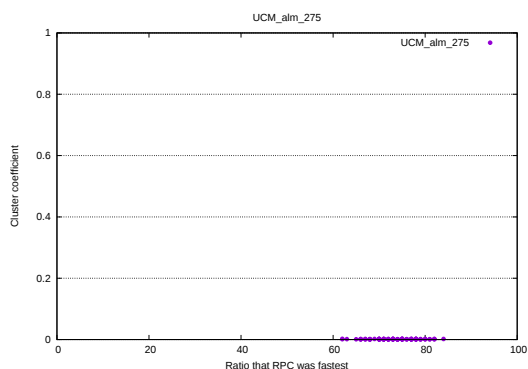


図 31: 修正 Configuration モデル (alm) べき指数 2.75

WS モデルでは、クラスター係数は大きく、RPC 最速割合は小さいという結果が出た。修正 Configuration モデルでは、クラスター係数はほぼ 0 に近いほど小さく、RPC 最速割合は大きいという結果が出た。

10 考察

定理 1 の対偶をとると「各頂点が記憶能力を持たず、情報を持っている頂点が単位時間に 1 つの隣接頂点にのみ情報を伝播するモデルにおいて、ネットワーク全体に情報が伝播されるまでの平均時間が、情報を伝播する隣接頂点を選択する際に次数の小さい頂点を優先的に乱択する方法が最小とならないならば、ネットワークは Uncorrelated 性を持たない」となり、真である。WS モデルは、全てのパラメーターにおいて RPC 最速割合が最大とならなかったため、Uncorrelated 性を持たない。WS モデルで生成したネットワーク (Uncorrelated 性を持たない) はクラスター係数が大きく、修正 Configuration モデルで生成したネットワーク (Uncorrelated 性を持つとされる) ではクラスター係数がほぼ 0 に近いほど小さかった。これより、Uncorrelated 性を持つかどうかにかかわらず、クラスター係数が関係している可能性はある。

また、本演習では WS モデルも修正 Configuration モデルも自己ループ・多重辺を許す・許さないのどちらも生成したが、自己ループ・多重辺を許す・許さないで実験結果にほとんど差は出なかった。頂点数が 10000 なので、ネットワークを生成する過程で自己ループ・多重辺がほとんど発生しなかったことが考えられる。

11 今後の課題

本演習では、スケールフリー性を持たないスモールワールドネットワークを用いて情報伝播実験をした結果、Uncorrelated 性を持たないことが分かった。スケールフリー性とスモールワールド性を併せ持つネットワークで情報伝播実験をさせることが今後の課題として考えられる。

参考文献

- [1] 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワーク 基礎から応用まで (近代科学社) 2010/4/26.
- [2] Hiroshi Toyozumi, Seiichi Tani, Naoto Miyoshi, Yoshio Okamoto, Reverse preferential spread in complex networks. Phys. Rev. E 86, 021103 (2012).
- [3] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature 393, pp440-442 (1998).
- [4] A.-L. Barabási and R. Albert, Emergence of scaling in random networks. Science 286, pp509-512 (1999).
- [5] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz and D. J. Watts, Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. Phys. Rev. E 64, 026118 (2001).
- [6] Michele Catanzaro, Marián Boguñá and Romualdo Pastor-Satorras, Generation of uncorrelated random scale-free networks. Phys. Rev. E 71, 027103 (2004).
- [7] 阿部 光太郎, 大谷 舞, BA モデルおよび修正 BA モデルで生成したネットワークの Uncorrelated 性について (http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2014/nw/network_resume.pdf) (2014).
- [8] 香取 秀柄, 逸見 優聡, BA モデルで生成されたネットワークと同じ次数列を持つネットワークの Uncorrelated 性について (http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2015/n2/n2_resume.pdf) (2015).
- [9] 枝國 雄太, BA モデルで生成されたネットワークにおける次数と情報伝搬速度の関係について (<http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2015/n1/resume.pdf>) (2015).
- [10] 飯田 佳徳, 丸山 隆太, BA モデルおよび Configuration モデルで生成したネットワークの Uncorrelated 性について (http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2016/nw/nw_resume.pdf) (2016).
- [11] 市川 慶徳, 湯浅 真, 異なる seed で生成した複雑ネットワークの特徴量 (<http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2017/NW/nw2017.pdf>) (2017).