修正版BAモデルで生成したネットワークのスケールフリー性判定計算実験

谷聖一　研究室　　田中 勇歩
Yuho Tanaka

概要

有限ネットワーク上において, 次数が大きな頂点ほど, 大きなの影響力を有すると思われる. ある仮定の元, 次数の逆数に比例した確率分布に従い情報を伝達する頂点を選択する方法が, 情報がネットワーク全体に行き渡るまでの平均時間が最小になることが証明されている.2011 年度の谷研究室の卒業生が, 証明された結果の妥当性を検証するため, スケールフリーネットワークを生成し, 情報伝播計算機実験を行ったところ, 相反する結果が得られた. この結果を検討するために本演習では, 生成したネットワークのスケールフリー性を判定する計算実験を行った.

1　はじめに

1.1　背景

普段意識することは少ないが, 私たちの身の回りには様々なネットワークが存在している. グラフ論理では, ネットワークは頂点と枝（辺）で表す. 例えば, 頂点を駅, 枝を駅間を結ぶ路線（線路）とみなせば鉄道網, 頂点を学校のクラスメイト, 枝をクラス内における友人関係とみなせば学校のクラス内における友人関係, 頂点をコンピューター, 枝をケーブルとみなせばインターネット網を表すことができる. これらのネットワークは複雑ネットワーク ([1]) と呼ばれることもあり, 世の中に多種多様に存在する.

グラフ論理の歴史は,18 世紀の数学者オイラーにまで遡る. オイラーは,1736 年にケーベルニクスという川の街に訪れたとき, 街に 7 本ある全ての橋を 1 回ずつ通り出発地点に帰着する散歩道があるかどうか自問した. この問は, 街の地図をグラフとして抽象化することによって, 数学的に解析できる. その後しばらくはグラフ論理の歩みは遅かったが,20 世紀に入ってからグラフ論理は体系化された. 現在では, グラフ論理は, 離散数学と呼ばれる数学の中の大きな研究分野である ([1]).

世の中にはネットワークを用いてモデル化できる問題が多数存在する. 例えば, 災害時における情報伝達問題, 交通網に関する問題等である. これらの問題は数理的な解析が可能である. これにより例えば, 伝達させたくない対象に対しては伝達しにくいようにする等の対策を講じることが期待できる.

1.2　目的

論文 [2] では, ある仮定の元, 次数の逆数に比例した確率分布に従い情報を伝達する頂点を選択する方法が, 情報がネットワーク全体に行き渡るまでの平均時間が最小になることが証明されている. 証明された結果が妥当かを検証するため,2011 年度の谷研究室の卒業生がスケールフリーネットワークを生成し情報伝播計算機実験を行った ([3,4]). しかし, 相反する結果が得られた. そこで生成したネットワークはどの程度スケールフリーネット性を持つのか検証する必要を感じた. 本演習では, 生成したネットワークのスケールフリー性を判定する計算実験を行った.

1.3　構成

本稿は以下のような構成になっている.2 節では, スケールフリーネットワークについて述べる.3 節では, 修正版 BA モデルについて述べる.4 節では, 実験方法について述べる.5 節では, 実験結果について述べる.6 節では, 今後の課題について述べる.

2　スケールフリーネットワーク

スケールフリーネットワークとは, ネットワーク理論の分野において枝が一部の頂点に集中しているネットワークのことをいう. また枝の集中している頂点はハブという. 実在するスケールフリーネットワークの例をあげると, インターネット, 映画俳優の共演ネットワーク等がある ([5]).

2.1　グラフ理論の概念

ここではグラフ理論に関する準備を行う. グラフとは集合 V とその要素間の関係を表す集合 $E \subseteq V \times V$ の組み合わせで,

$$G = (V, E)$$

と定義される.V の要素を頂点, 節点, 点などと呼び,E の要素を枝, 辺などと呼ぶ ([5]).

グラフは集合の要素（頂点）間に「関係（枝）」を加

えただけの非常にシンプルなものだが, 様々なものをモデル化できる. 鉄道網を例として説明する.

- 頂点：駅
- 枝：駅と駅をつなぐ経路
- 次数：頂点から出ている路線の個数

図 1 において紫色の点は頂点を表し, 紫色の頂点同士を結ぶ直線は枝を表している. この場合は, 頂点 A の次数は 3 となる.

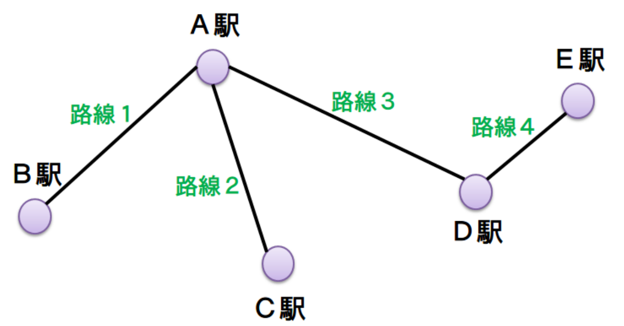

図 1: グラフ G

2.2 スケールフリー性

スケールフリー性とは, 少数の頂点が多くの枝を持ち, 多数の頂点がわずかな枝しか持たない性質である. 例えば, 上記の鉄道網で考えると, 一部の駅は非常に多く路線を持っている. 一方, 多く駅は少ない路線しか持たない. またネットワーク上の次数分布を調べてみると, ベキ分布であることが多く, このようなグラフはスケールフリー性を持つといわれる ([6]). ここで, 次数分布がベキ則であるとは,

$$P(k) \propto k^{-\gamma}, (\gamma > 0)$$

を満たしていることである. また次数分布を両対数で描写すると直線のグラフになる.

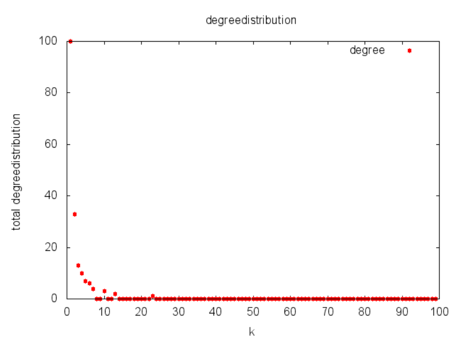

図 2: 次数分布図 -100 頂点-

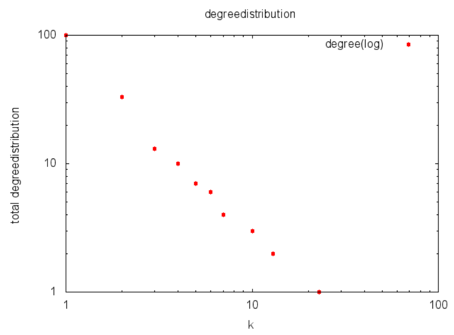

図 3: 次数分布図 -100 頂点-(両対数)

またハブが多数存在する為、グラフの任意の 2 頂点間の距離が短い.

このような性質を持っているネットワークがスケールフリーネットワークである.

2.3 スケールフリーネットワークの特徴

スケールフリーネットワークの特徴に, 新しい頂点が次々に参入してもネットワークの形状が変化しない, フラクタル性を持っているところにある. フラクタルとは, フランスの数学者ブノワ・マンデルブロ が導入した幾何学の概念であり, 図形の部分と全体が自己相似になっているものをいう ([7]).

またスケールフリーネットワークは, 偶発的な障害に対しては非常に強い傾向がある. その為, 全頂点のうちのいくつかがダウンしたとしても, 代替経路の存在によって頂点間の接続が維持でき, 系全体の平均最短経路はほとんど変化しない. 弱点としては, 特定の重要なハブをピンポイントで狙った攻撃に対しては脆弱な傾向がある. 例を挙げると, 食物連鎖のネットワークは生物種のランダムな絶滅に対しては頑強であるが, 特定の重要な種が絶滅すると大きな影響を受けてしまう. この特徴は, 同じ頂点数, 同じ枝数で構造が異なる他のネットワークでは見られない.

2.4 代表的なモデル：BA モデル

スケールフリーネットワークを生成するモデルはいくつか提唱されている. 代表的なものとして,BA モデルが挙げられる.BA モデルとは,1990 年に Barabási と Albert によって提案されたネットワークモデルで,2 人の頭文字をとって BA モデルと呼ばれる ([8]).BA モデルは, 以下の特徴を持つ.

- ネットワークの成長：頂点が次々とネットワークに加わる.
- 優先的選択：新しく加わった頂点は, その時点で次数の高い頂点に結びつきやすい.

この為, 次数が高くなった頂点はその後も新しい枝を獲得しやすく, ハブになりやすい傾向がある. 逆に次数獲得競争に一度破れてると, その後は新しい枝を獲得して他の頂点を追い抜いてハブになるのは難しい.

2.5 BA モデルのアルゴリズム

ここでは,BA モデルでスケールフリーネットワークを生成するアルゴリズムを説明する.

1. $n > 1$ 個の頂点からなるグラフを置く.
2. 新しい頂点を 1 個を追加し, 既に存在している n 個の頂点に対して, 枝を張る. この時, 新しい枝が張られる確率は, 各頂点のその時点での次数 k の総次数に比例する. すなわち,

$$\frac{k_i}{\sum_{j=1}^{n} k_j}, (1 \leq i \leq n)$$

   の確率である.
3. 指定の頂点数になるまで Step2 を繰り返す.

3 修正版 BA モデル

本研究では, 修正版 BA モデルを採用した. 修正版 BA モデルのアルゴリズムは以下のとおりである.

1. 枝を保有しない既存の頂点を 1 個置く.
2. 新しい頂点を 1 個追加し, 既に存在している既存の頂点に対して 1 つの枝を張る. この時, 新しい枝が貼られる確率は, 各頂点のその時点での総次数に比例する.
3. 指定の頂点数になるまで Step2 を繰り返す.

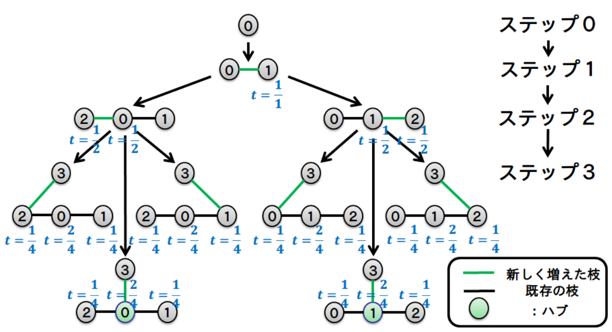

図 4: 頂点数が 3 までの修正版 BA モデル

つまり,$n-1$ 回のステップで,$n-1$ 個の頂点と $n-1$ 本の辺が増加する. その結果, 全頂点数は n 個のネットワークが生成される. また修正版 BA モデルが生成するグラフは木構造となる.

4 実験方法

頂点数 1000,1 万,10 万のネットワークを修正版 BA モデルで各 300 個生成する. この生成したネットワークの各頂点の隣接頂点, 次数を読み取り, 3 つの方法で調査する.

1. 直感的にも判断できるよう, ネットワークを可視化
2. ネットワークの直径, 半径, 平均値を計算し, これらの度数分布グラフを描画
3. 次数分布グラフを描画し, データの配置を調査

なおネットワーク生成のプログラムには c ++を使用し, 実験用プログラムはシェルスクリプトで管理した関係上, 入力にはコマンドライン引数を使用する.

4.1 実験準備

ここでは, ネットワークの生成プログラムについて説明する.

作成ファイル名, 最大頂点数を入力すると, ファイルの 1 行目に最大頂点数, 枝数が記録される.2 行目以降から最大頂点数まで, 各頂点がどの頂点に枝を張ったのかが記録される. その結果を入力したファイル名で保存する. このファイルを各 300 個生成する.

またこのファイルから, 各頂点がどの頂点に枝を張ったのかを最大頂点数まで読み取り, プログラム内に格納する. 格納内容は, ネットワークの可視化や他のプログラムで使用する.

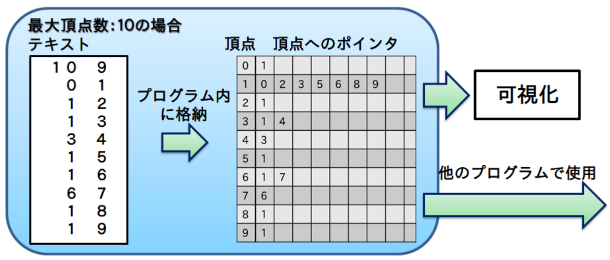

図 5: 一連の流れ

4.2 ネットワークの可視化

4.1 でプログラム内に格納した内容の各頂点より低い頂点への枝を削除する.

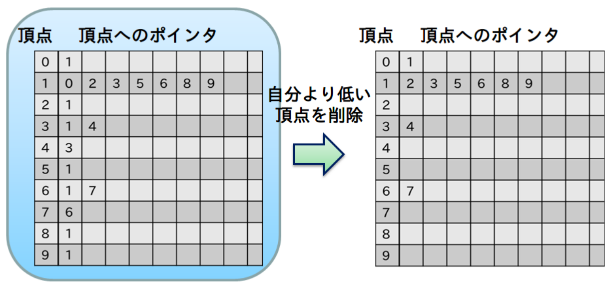

図 6: プログラム内の格納状態

頂点番号が低い順に以下の方法で配置し, ネットワークを可視化する.

1. 現在の頂点を置く
2. 現在の頂点の隣接頂点に全て枝を張る
3. 次の頂点に移動する
4. 1 から 3 を移動先の頂点が無くなるまで繰り返す

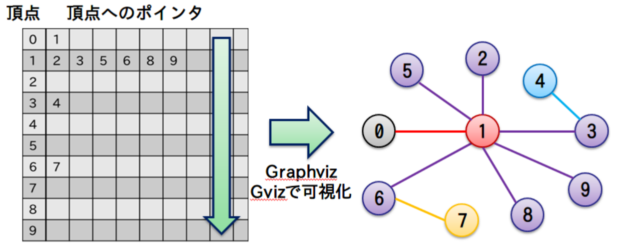

図 7: 格納内容からネットワークの可視化

ネットワークの可視化には, アメリカ合衆国 AT&T の研究所が開発したオープンソースのツールパッケージである Graphviz を使用し, 高品質な有向グラフの作成する.Graphviz のユーザーインターフェースは CUI で,DOT ファイルを書くことになる. DOT 言語には弱点があり, 制御構造を持ってない. そこで Ruby を,Graphviz インタフェースとして使用する. なおプログラムの作成には,Gviz という Ruby のプラグインも使用する.

4.3　ネットワークの直径, 半径, 平均値の計算

ネットワークの直径, 半径, 平均値を計算する上で必要な知識を簡単に説明する.

現在の頂点から各頂点への深さの最大値を eccentricity という. この eccentricity の全頂点中の最大値が直径 (diameter) といい, 全頂点中の最小値が半径 (radius) という. 平均値は eccentricity の平均である.

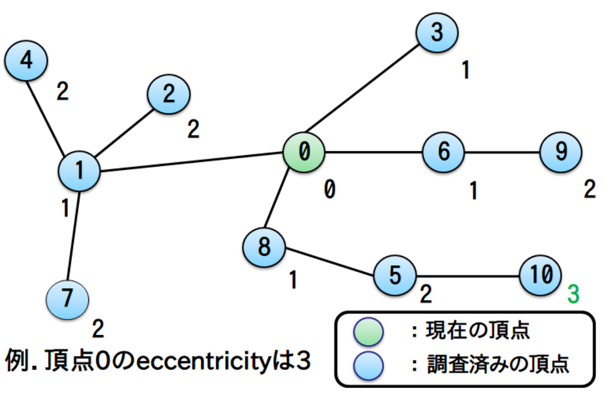

図 8: 頂点 0 の eccentricity

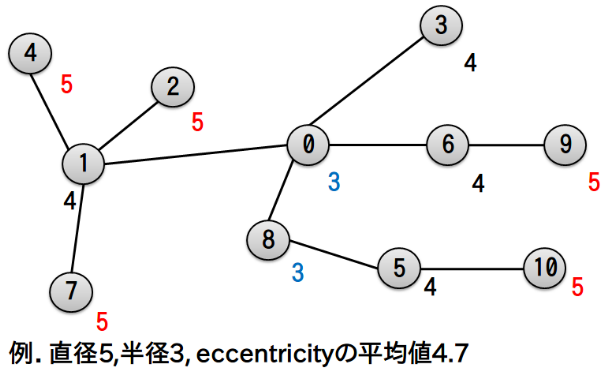

図 9: 直径, 半径, 平均値

ネットワークの描写には, 各ネットワークの 300 個分のデータの直径, 半径, 平均値を計算し, それぞれの分布図を作成する.

4.4　次数分布図の作成

次数分布図は, 次数分布の両対数を描写して作成した. しかしこの方法はノイズに弱く, 描写の乱高下が懸念される. そこで同時により有効な方法である, 元の次数分布の累積分布の両対数を描写して作成した.

次数分布の両対数を描写する方法では,X 軸は次数 k,Y 軸は次数が k である点の数を総次数で割ったものとする. これを X 軸・Y 軸共に両対数で描写する.

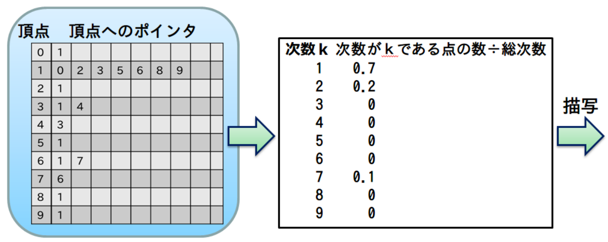

図 10: 次数分布の両対数を描写

元の次数分布の累積分布の両対数を描写する方法では,X 軸は次数 k,Y 軸は累積分布とする. これを X 軸・Y 軸共に両対数で描写する.

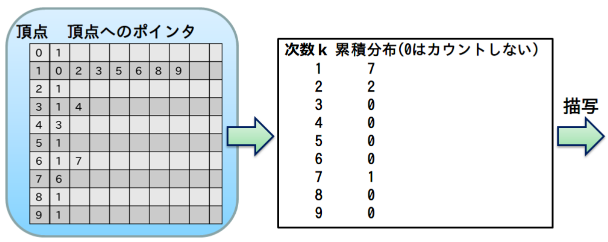

図 11: 元の次数分布の累積分布の両対数を描写

なお次数 k の範囲は,1 から各ネットワークの最大長点数までとする.

4.5　グラフの描写：gnuplot

グラフの描写には 2 次元および 3 次元のグラフを描画するためのフリーウェアである gnuplot を使用する.gnuplot のユーザーインターフェースは CUI の為, 利用者がコマンドを打ち込んで行かなければならない. 特徴として,2 次元グラフの描写機能が極めて強力な事と多様な画像の形式をサポートしている事が挙げられる. なお 3 次元グラフも描写可能だが,2 次元グラフほど強力ではない.

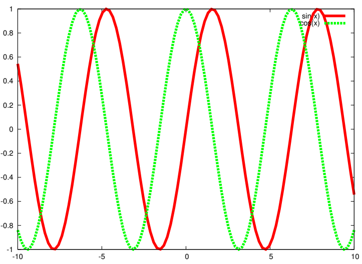

図 12: gnuplot で作成した sin x と cos x のグラフ

5　実験結果

5.1　修正版 BA モデルのネットワーク

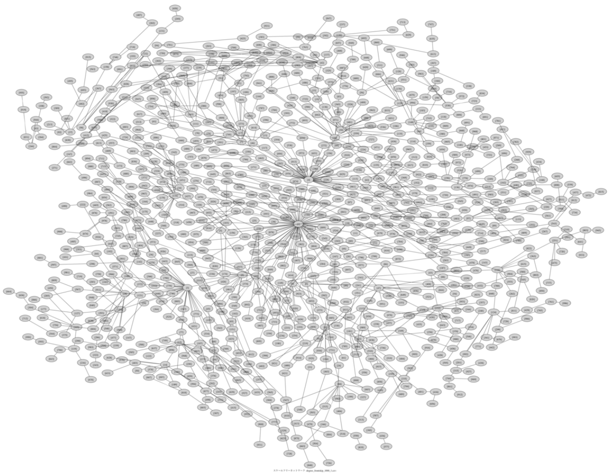

図 13: 頂点数 1000 のネットワーク-1-

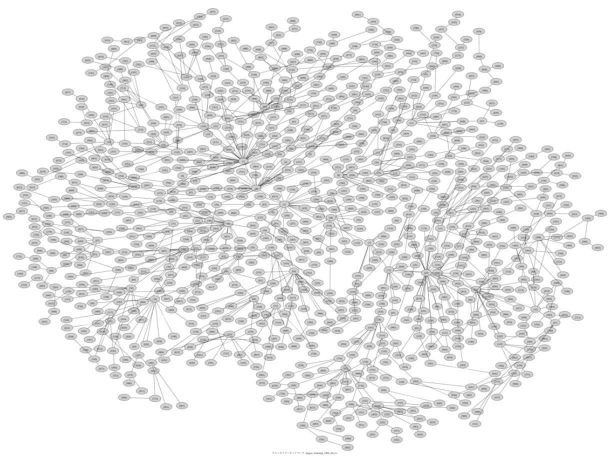

図 14: 頂点数 1000 のネットワーク-26-

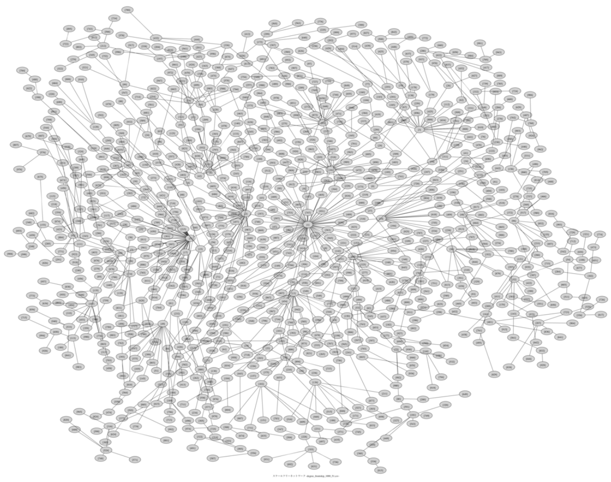

図 15: 頂点数 1000 のネットワーク-51-

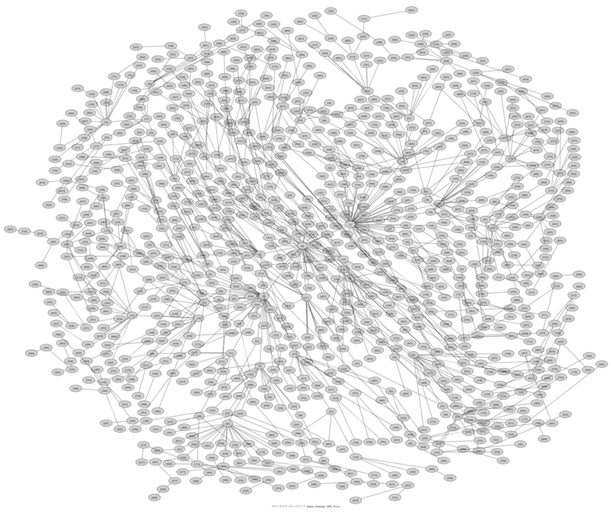

図 16: 頂点数 1000 のネットワーク-76-

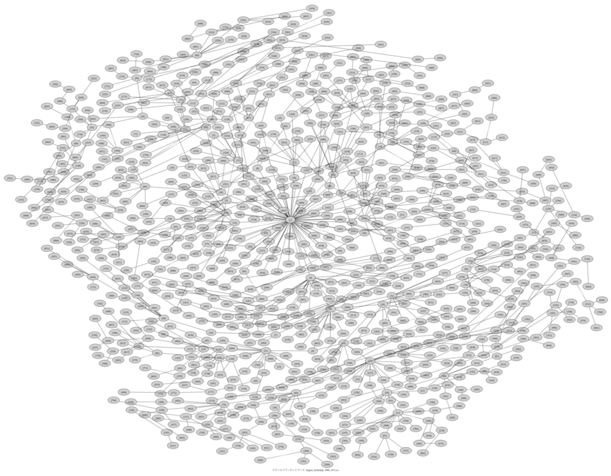

図 17: 頂点数 1000 のネットワーク-101-

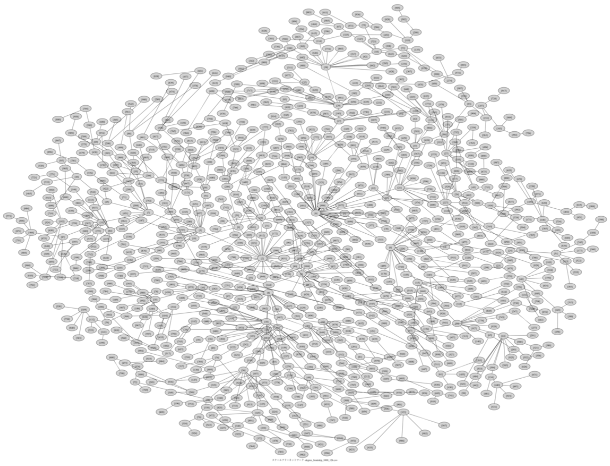

図 18: 頂点数 1000 のネットワーク-126-

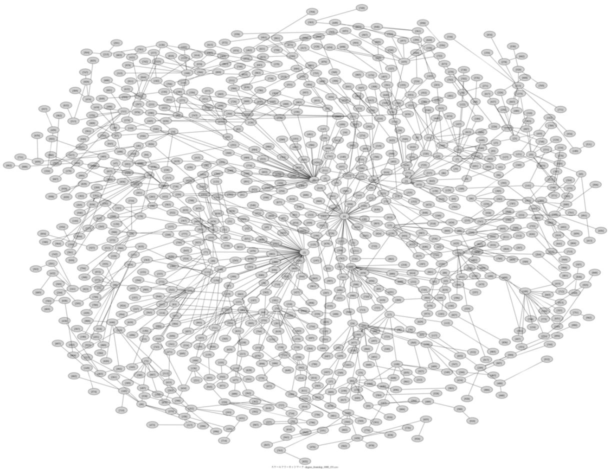

図 19: 頂点数 1000 のネットワーク-151-

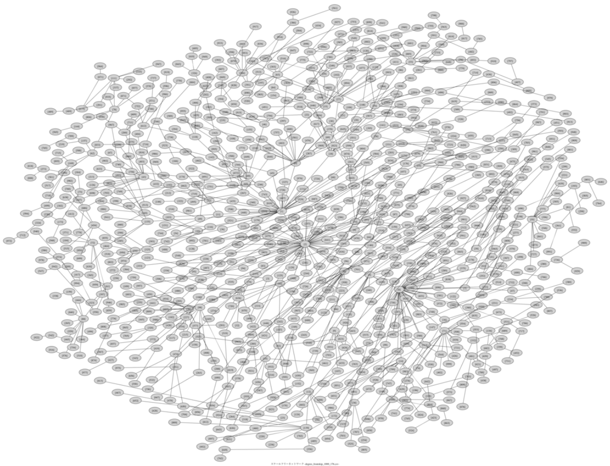

図 20: 頂点数 1000 のネットワーク-176-

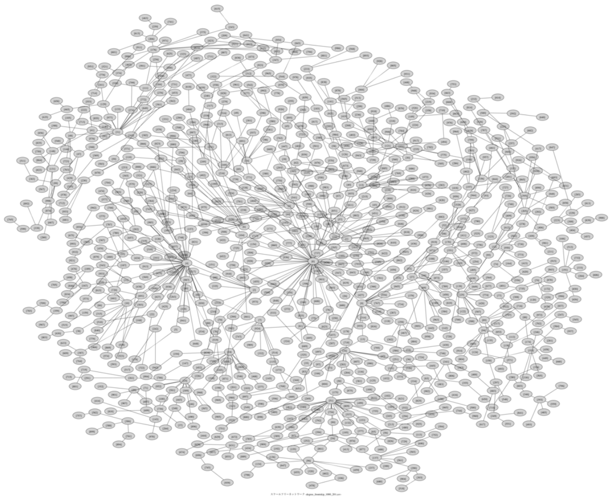

図 21: 頂点数 1000 のネットワーク-201-

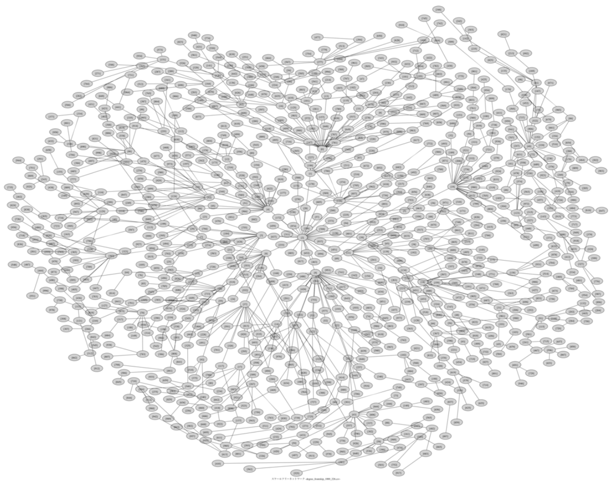

図 22: 頂点数 1000 のネットワーク-226-

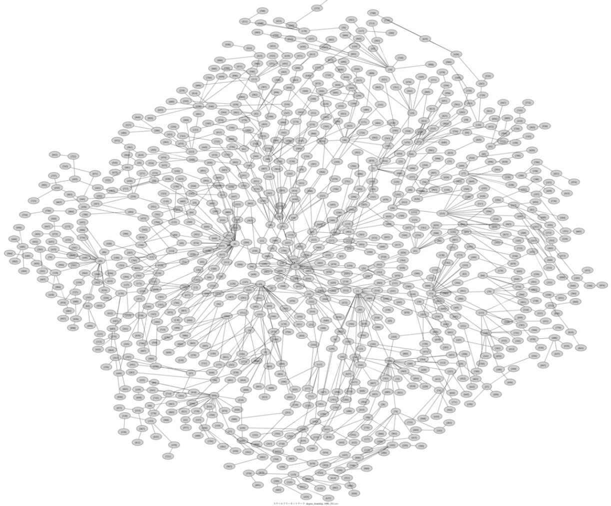

図 23: 頂点数 1000 のネットワーク-251-

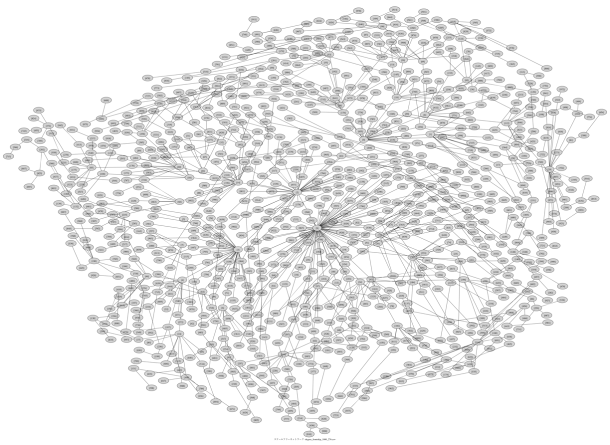

図 24: 頂点数 1000 のネットワーク-276-

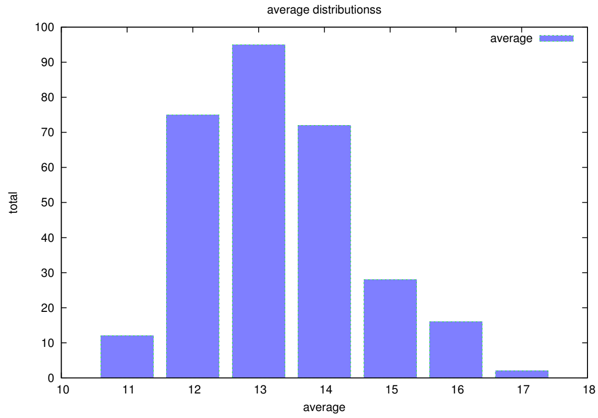

図 27: average の度数分布グラフ

5.2 直径, 半径, 平均値の度数分布グラフ

5.2.1 頂点数 1000

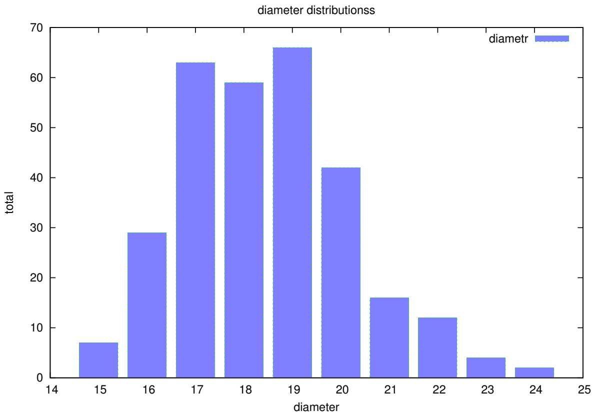

図 25: diametr の度数分布グラフ

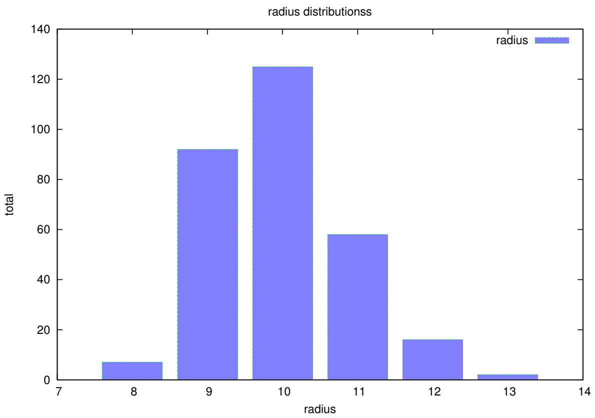

図 26: radius の度数分布グラフ

5.2.2 頂点数 10000

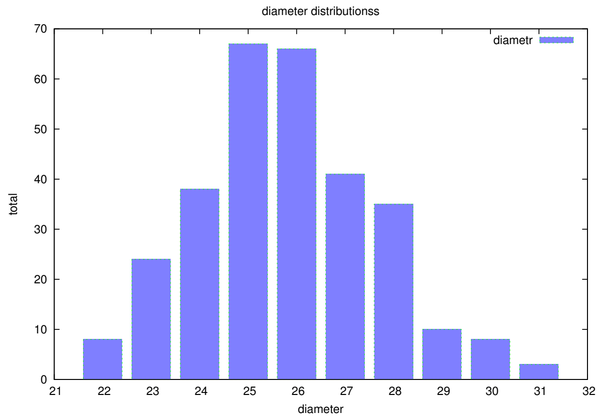

図 28: diametr の度数分布グラフ

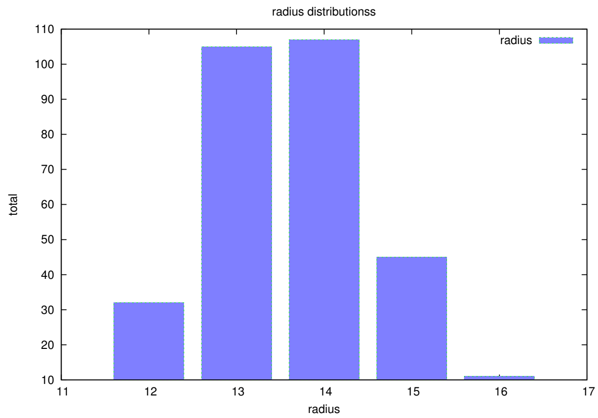

図 29: radius の度数分布グラフ

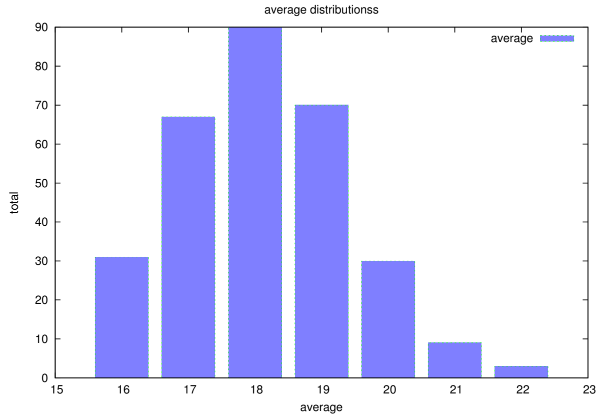

図 30: average の度数分布グラフ

5.2.3 頂点数 100000

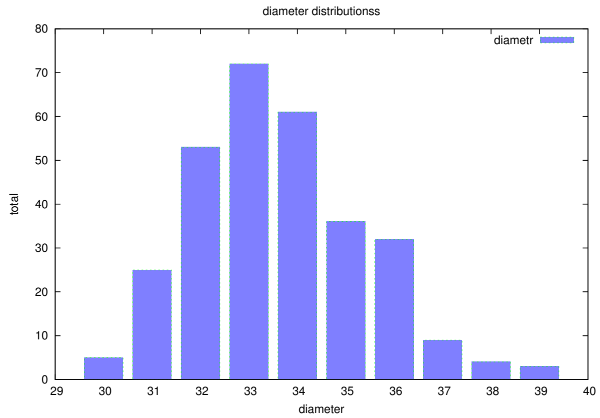

図 31: diametr の度数分布グラフ

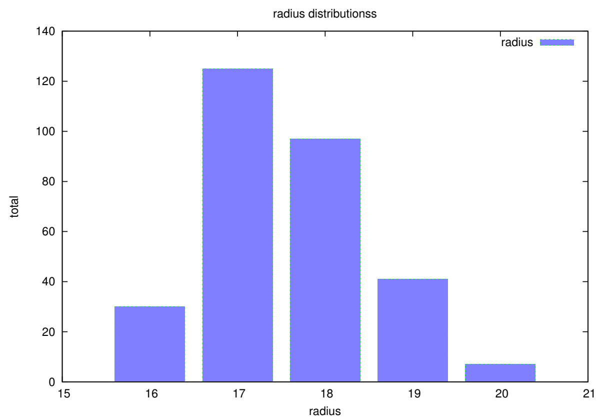

図 32: radius の度数分布グラフ

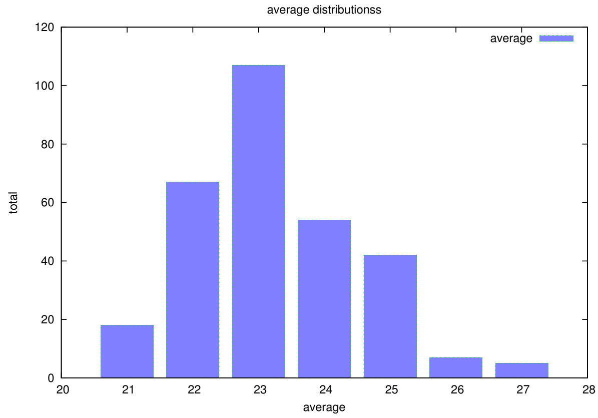

図 33: average の度数分布グラフ

5.3 次数分布グラフ（次数分布の両対数を描写）

5.3.1 頂点数 1000

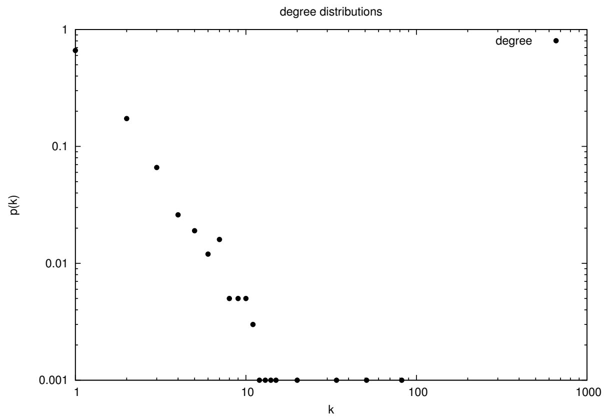

図 34: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-1-

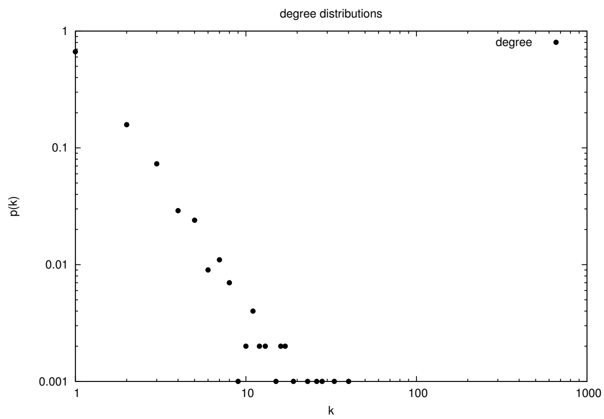

図 35: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-26-

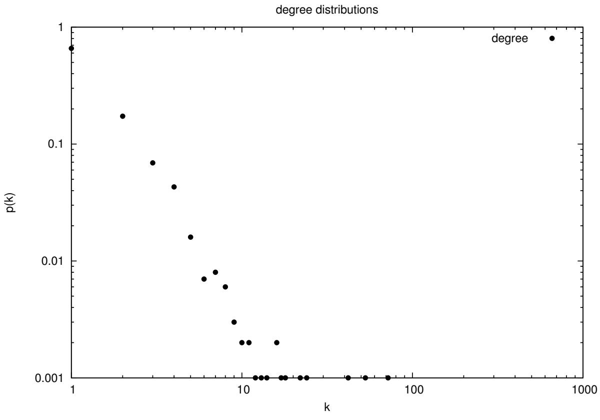

図 36: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-51-

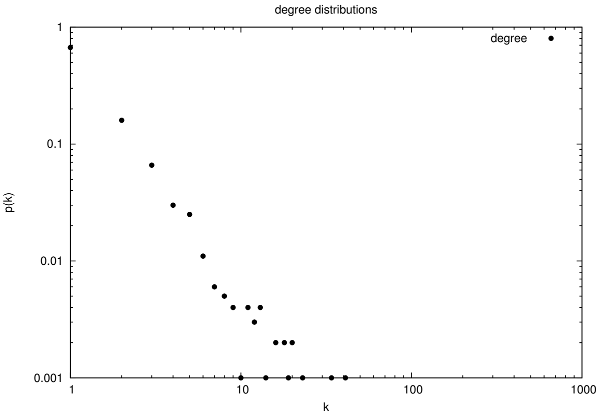

図 39: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-126-

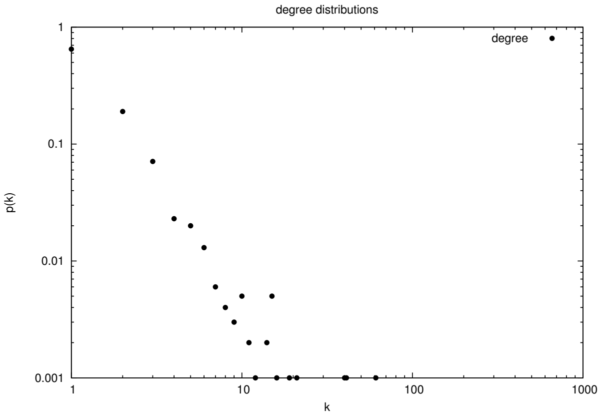

図 37: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-76-

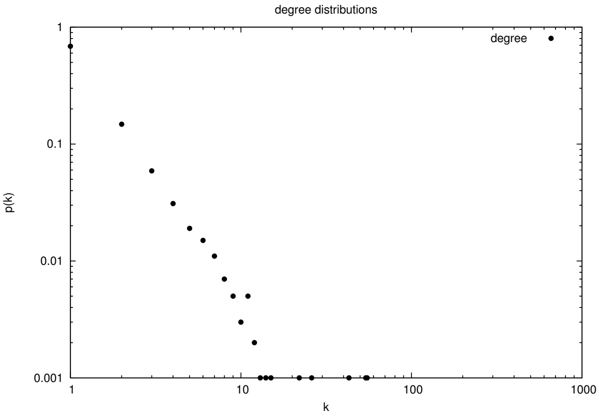

図 40: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-151-

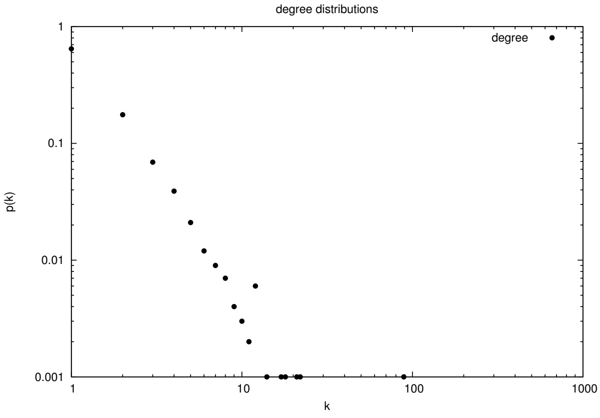

図 38: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-101-

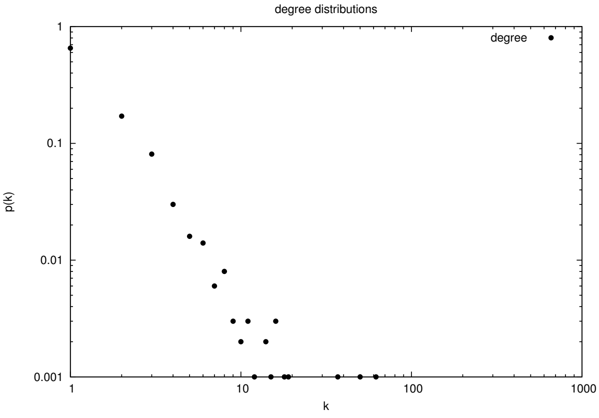

図 41: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-176-

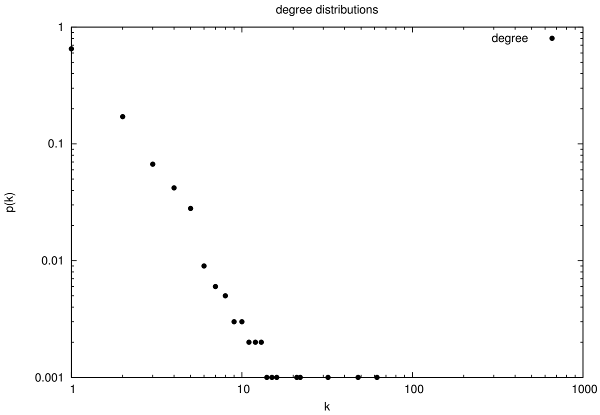

図 42: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-201-

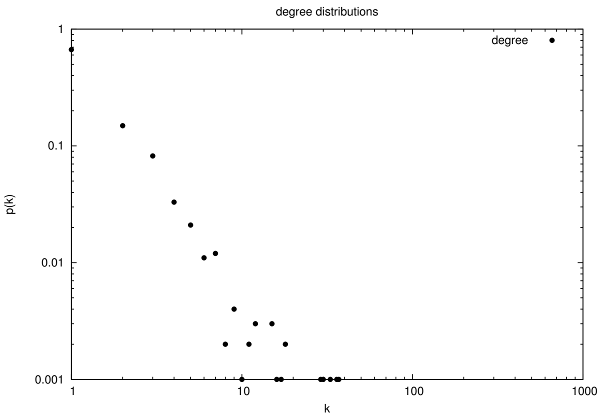

図 43: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-226-

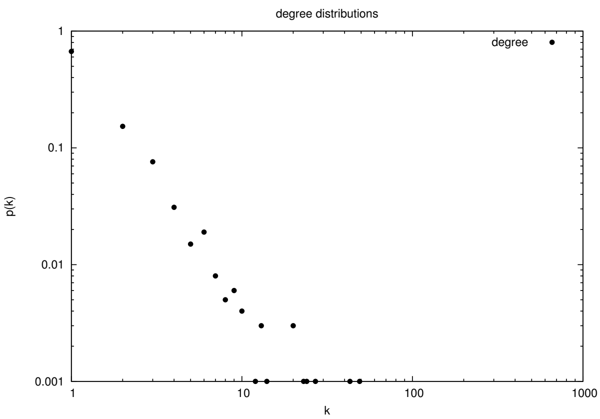

図 44: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-251-

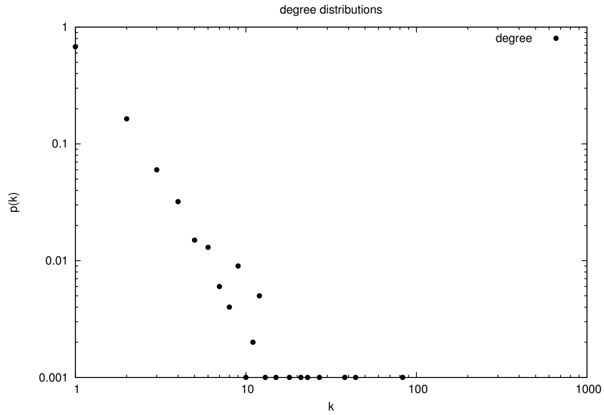

図 45: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-276-

5.3.2　頂点数 10000

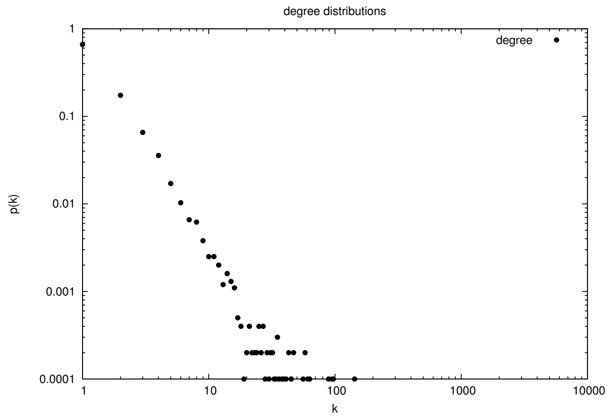

図 46: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-1-

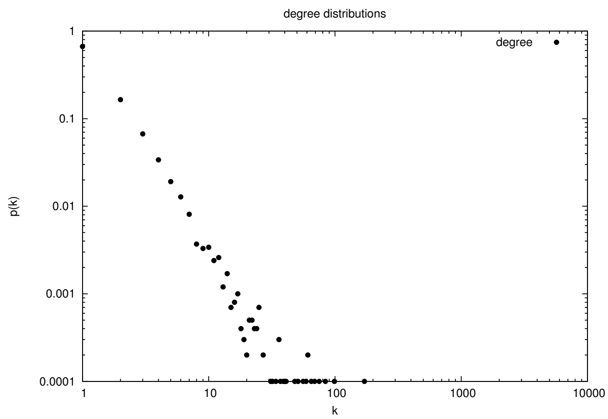

図 47: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-26-

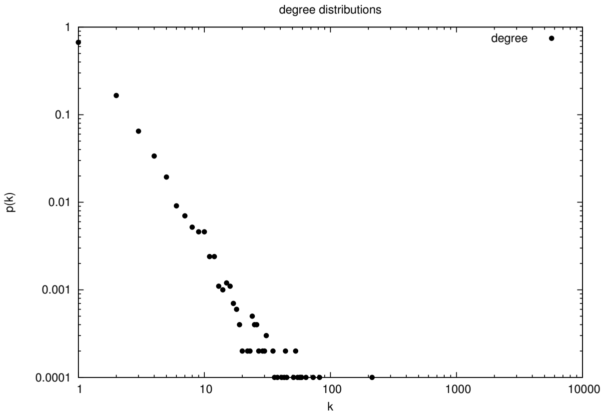

図 48: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-51-

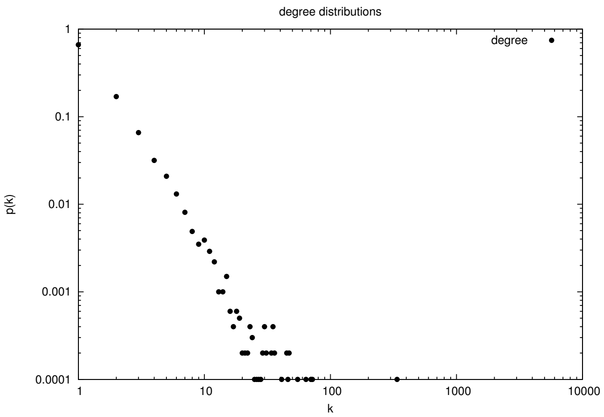

図 49: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-76-

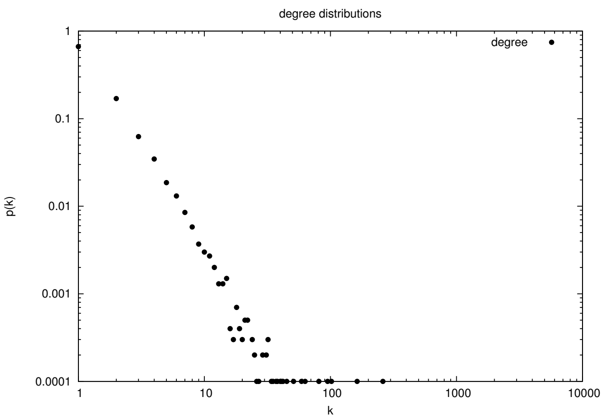

図 50: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-101-

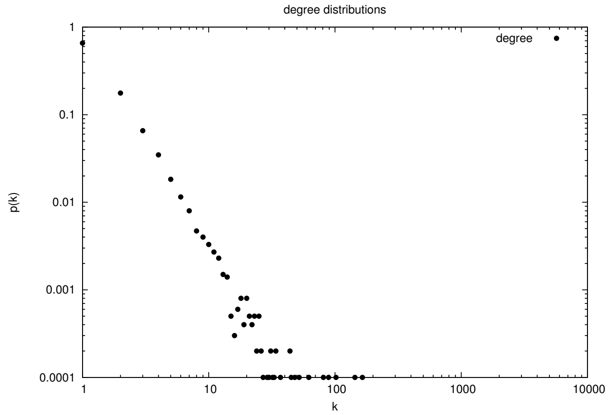

図 51: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-126-

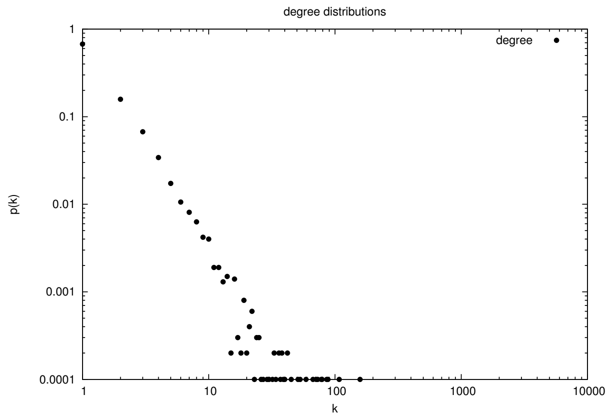

図 52: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-151-

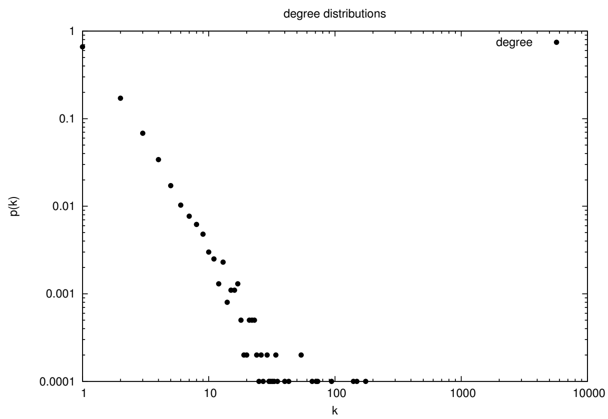

図 53: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-176-

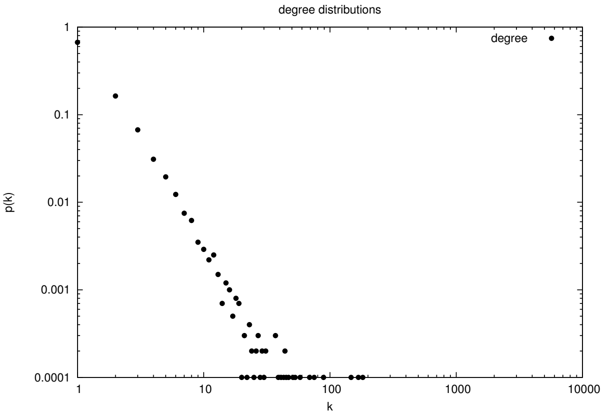

図 54: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-201-

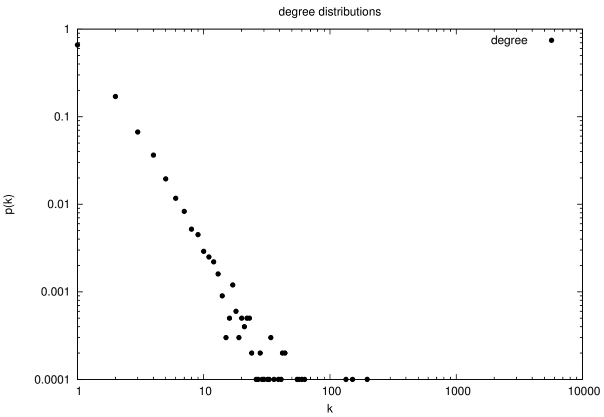

図 55: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-226-

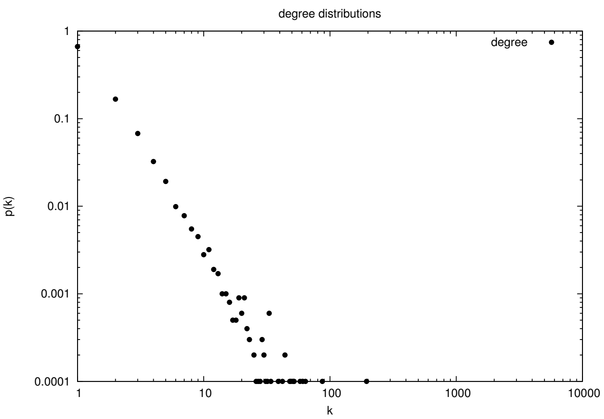

図 56: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-251-

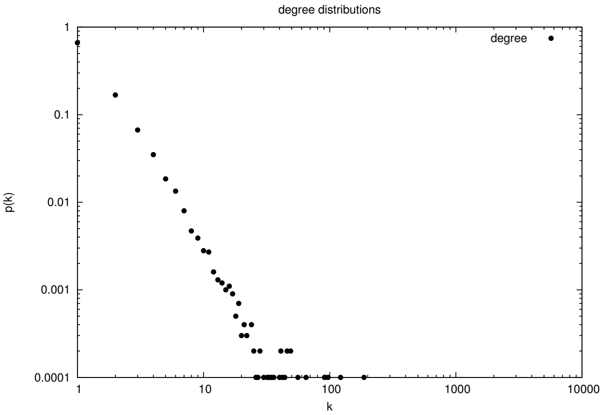

図 57: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-276-

5.3.3 頂点数 100000

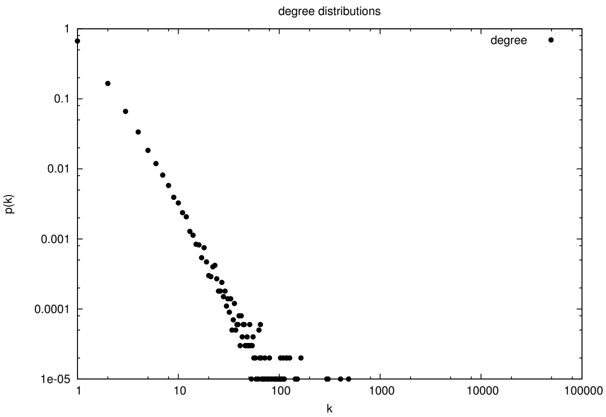

図 58: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-1-

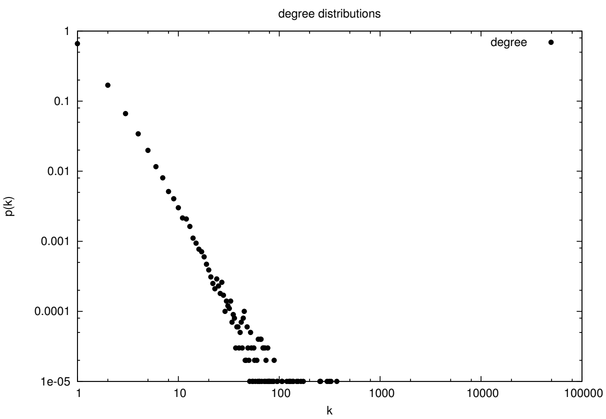

図 59: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-26-

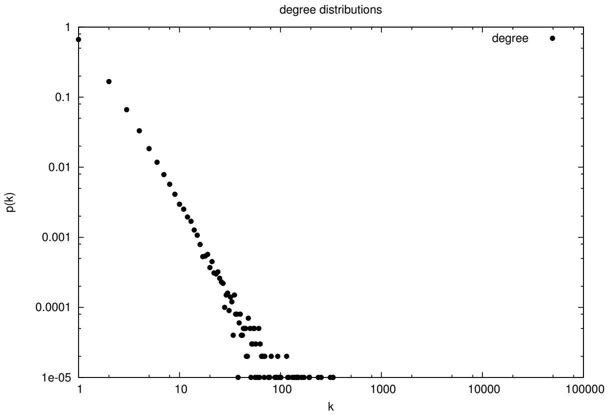

図 60: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-51-

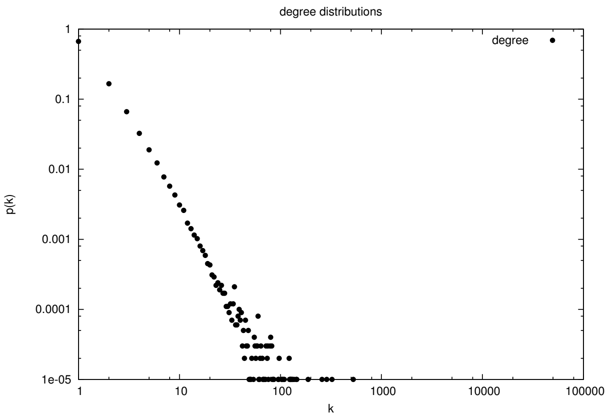

図 61: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-76-

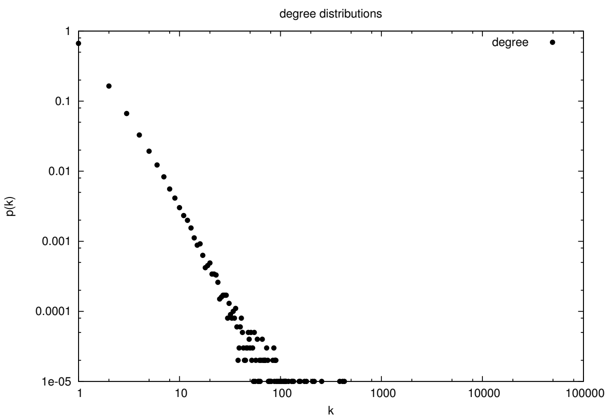

図 62: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-101-

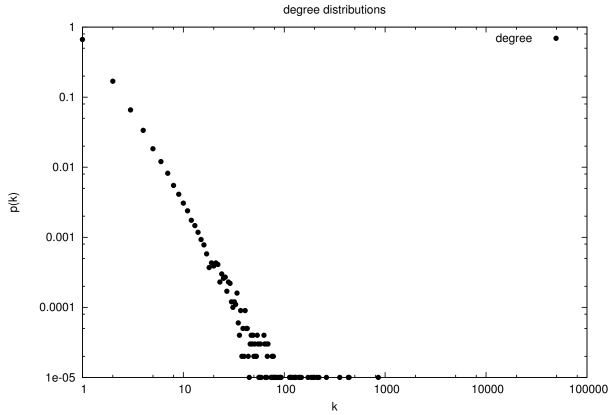

図 63: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-126-

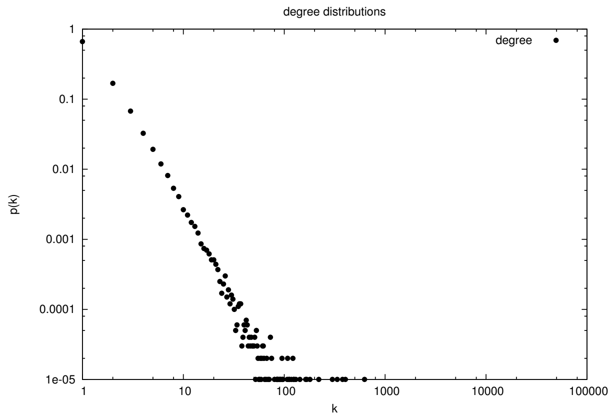

図 64: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-151-

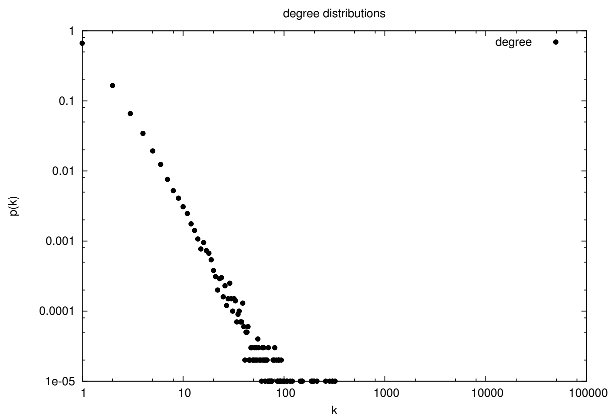

図 65: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-176-

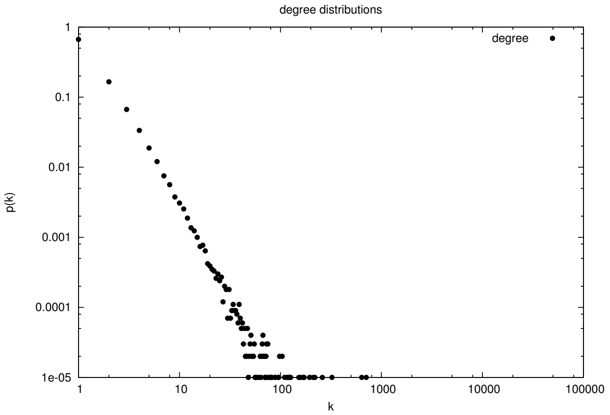

図 66: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-201-

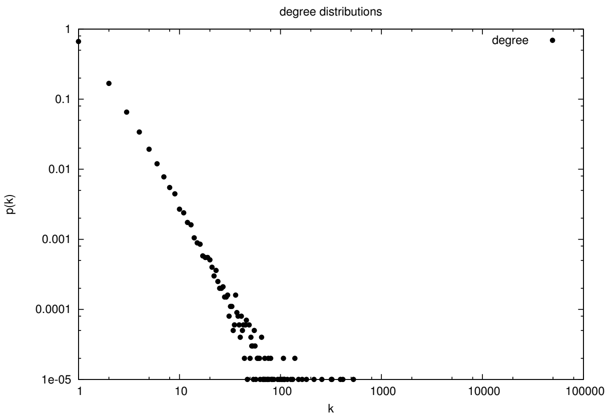

図 67: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-226-

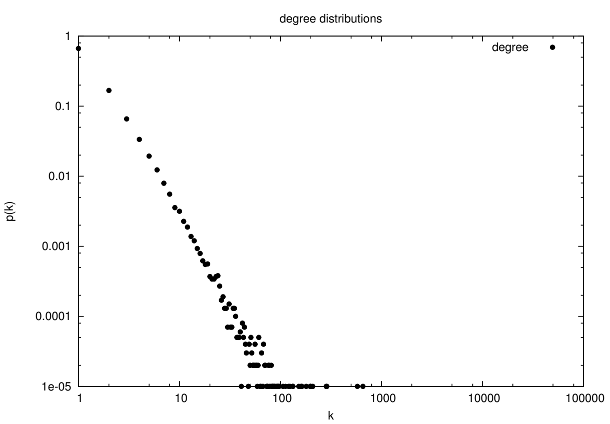

図 68: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-251-

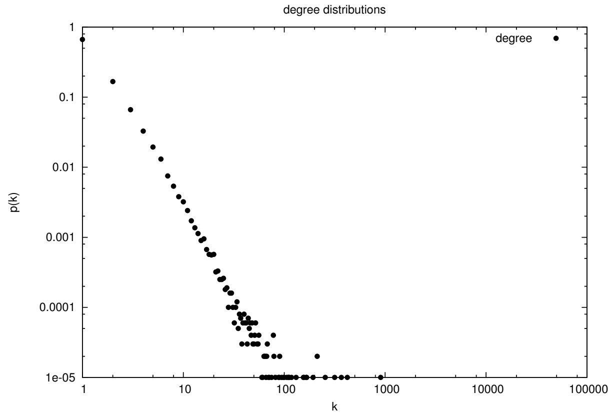

図 69: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-276-

5.4 次数分布グラフ（元の次数分布の累積分布の両対数で描画）

5.4.1 頂点数 1000

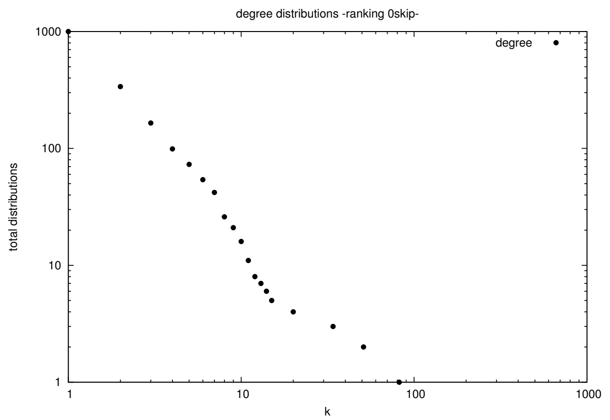

図 70: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-1-

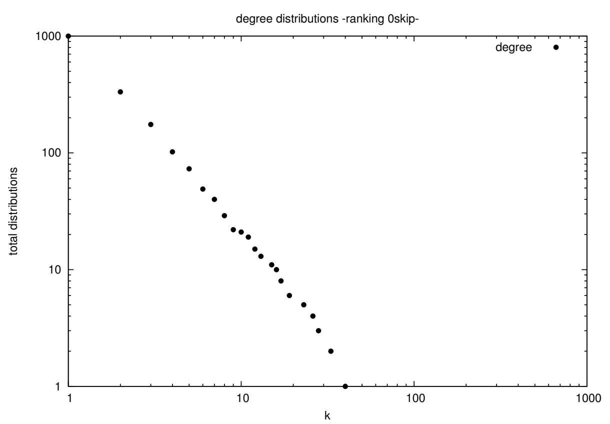

図 71: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-26-

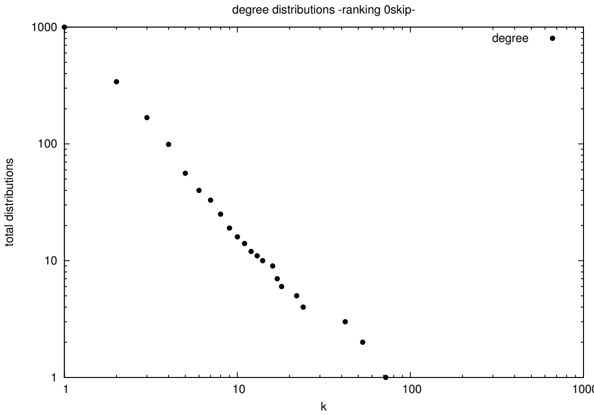

図 72: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-51-

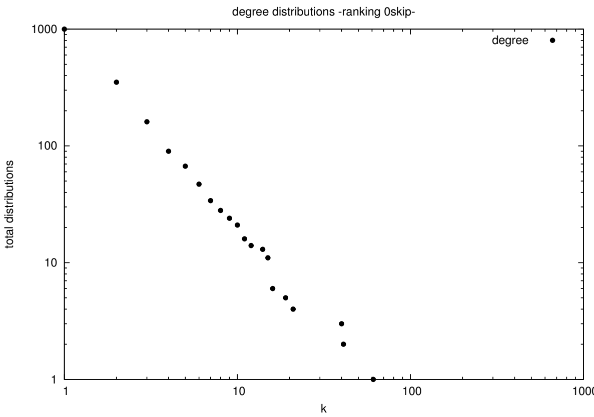

図 73: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-76-

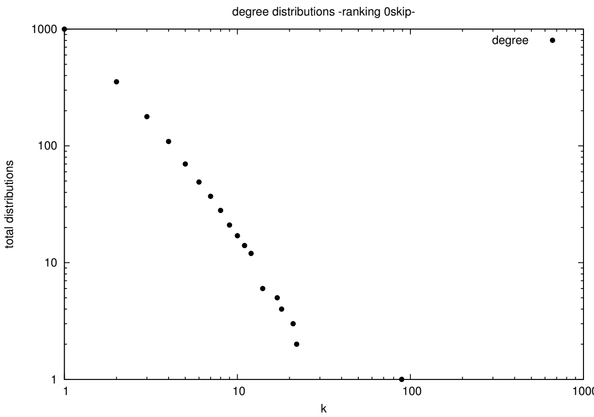

図 74: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-101-

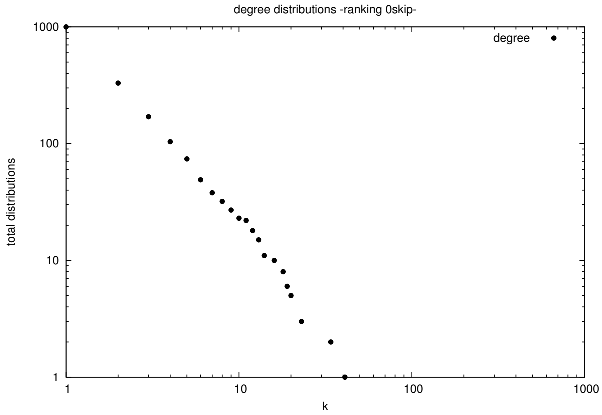

図 75: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-126-

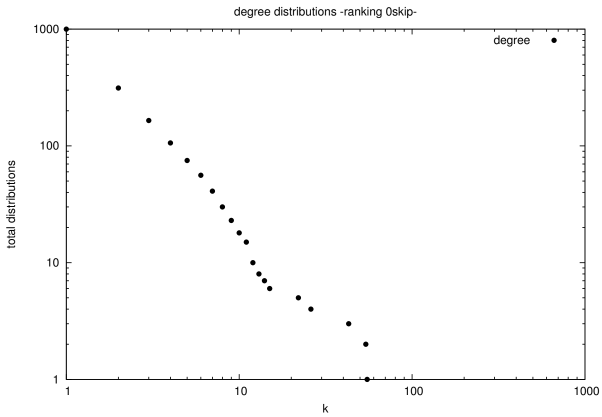

図 76: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-151-

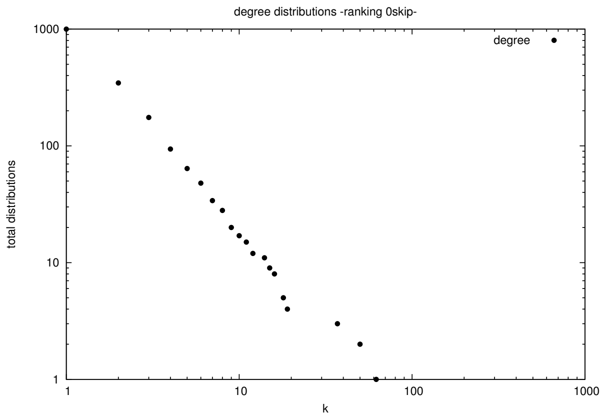

図 77: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-176-

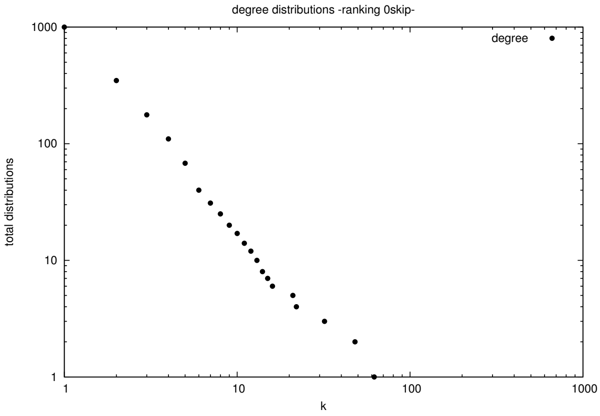

図 78: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-201-

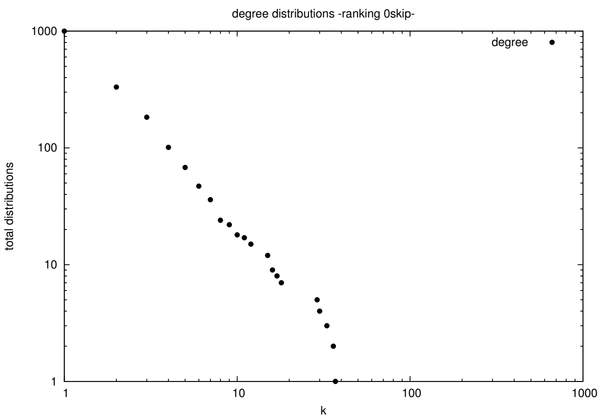

図 79: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-226-

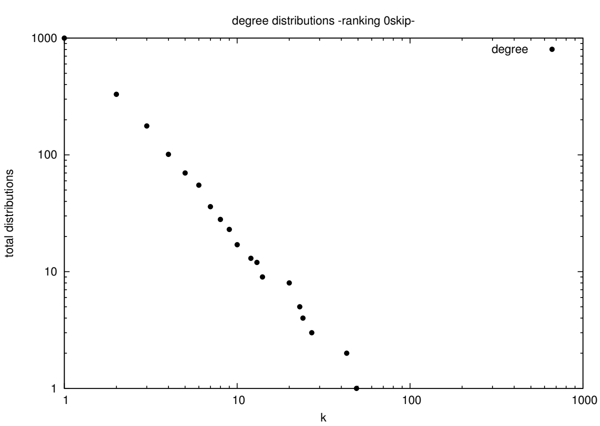

図 80: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-251-

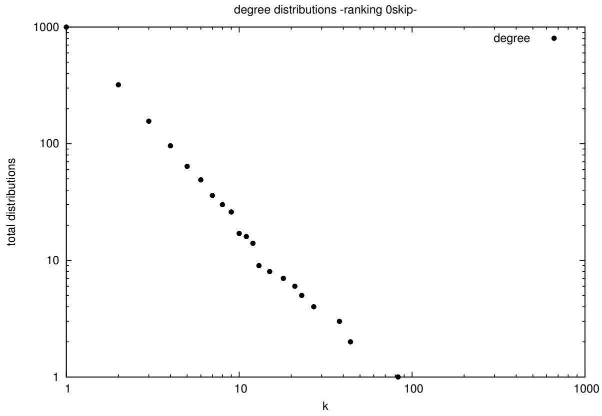

図 81: 頂点数 1000 の次数分布グラフ-276-

5.4.2 頂点数 10000

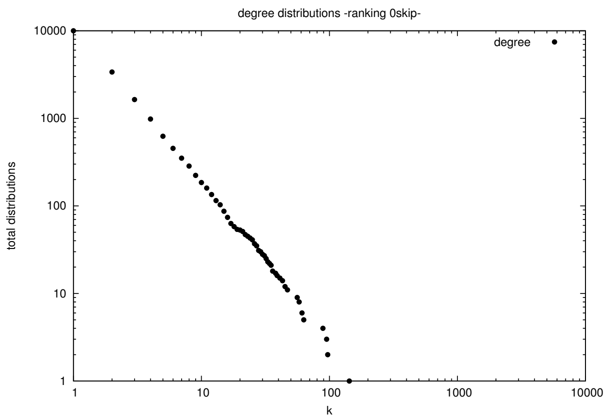

図 82: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-1-

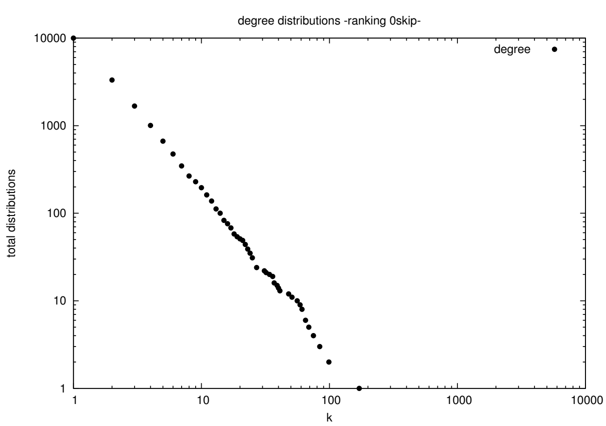

図 83: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-26-

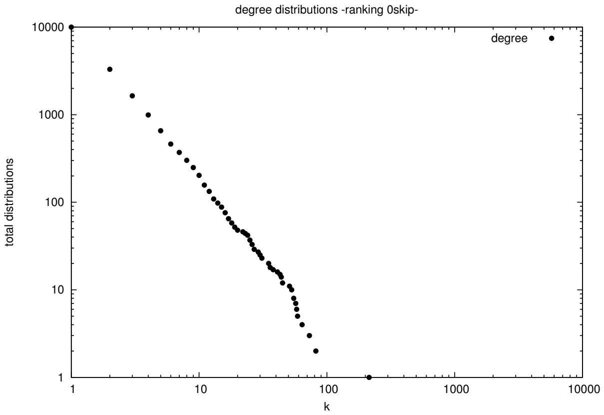

図 84: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-51-

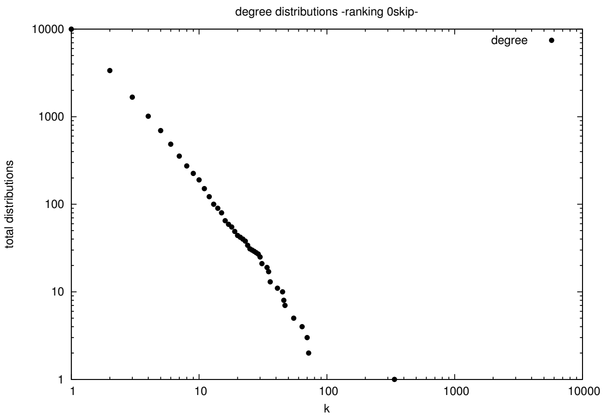

図 85: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-76-

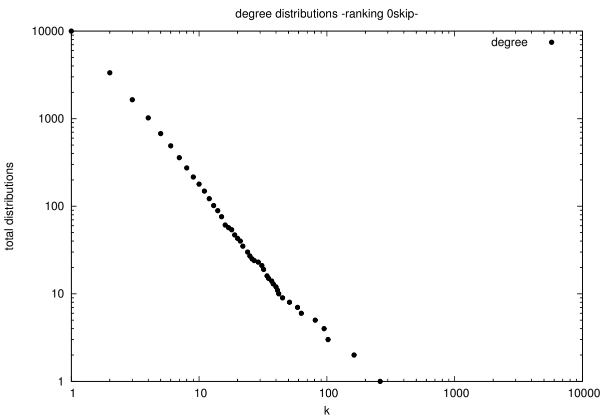

図 86: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-101-

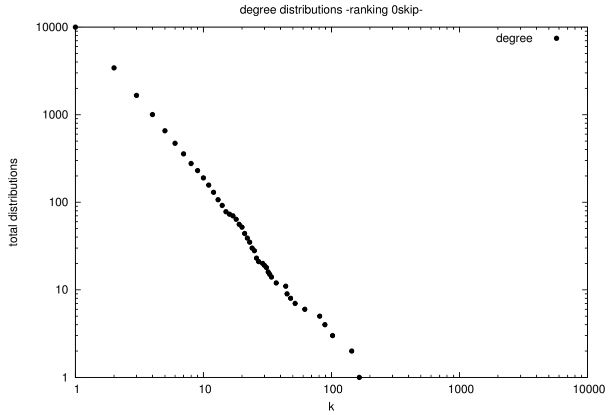

図 87: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-126-

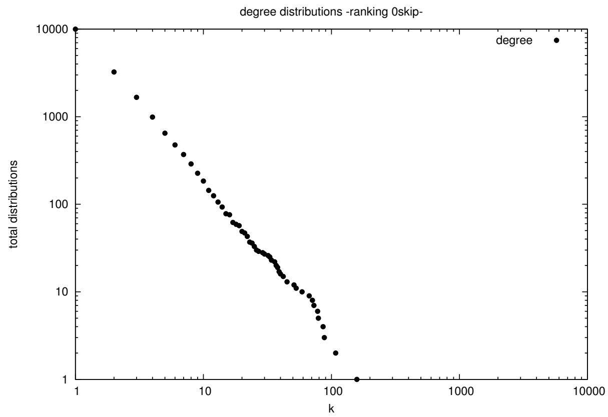

図 88: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-151-

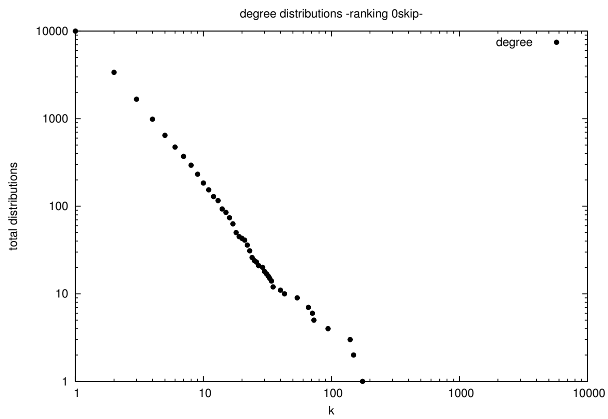

図 89: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-176-

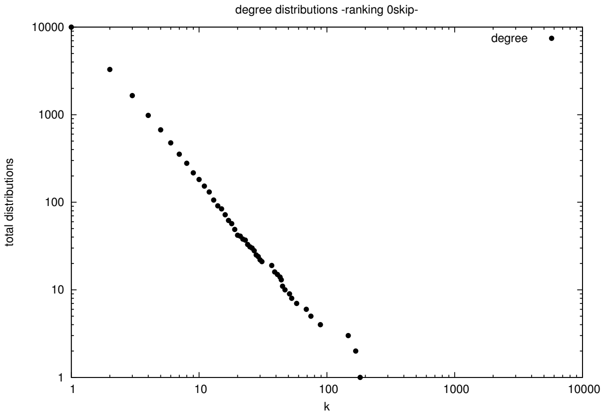

図 90: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-201-

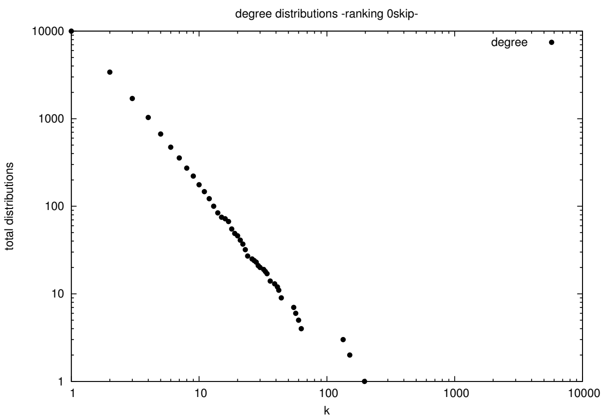

図 91: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-226-

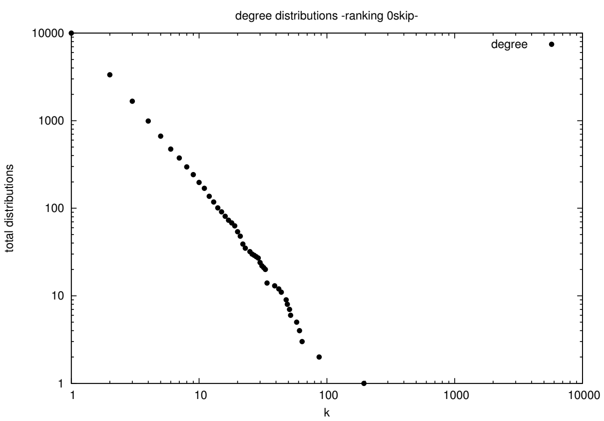

図 92: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-251-

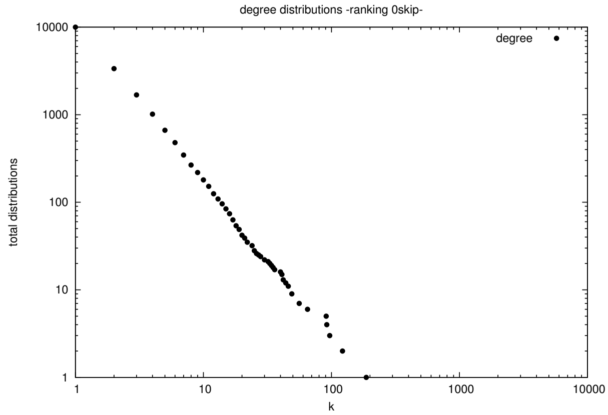

図 93: 頂点数 10000 の次数分布グラフ-276-

5.4.3　頂点数 100000

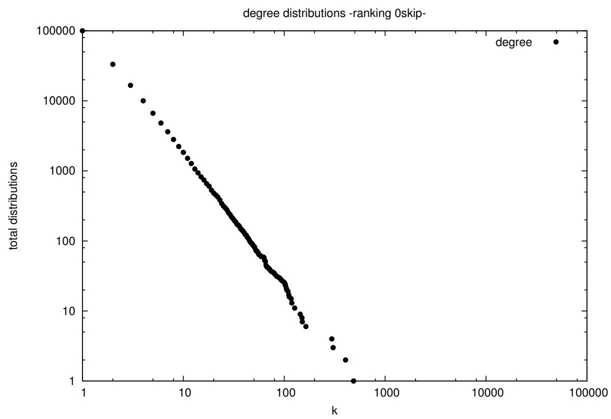

図 94: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-1-

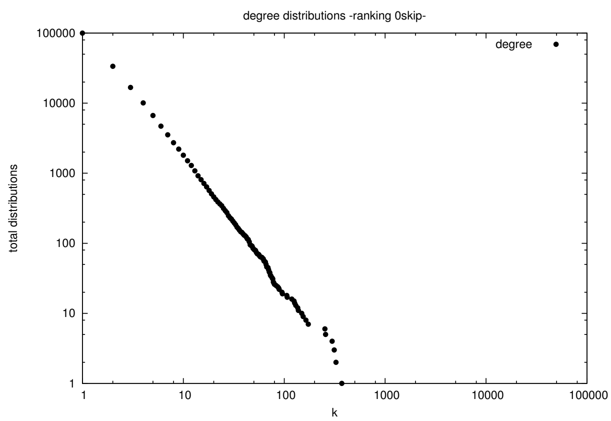

図 95: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-26-

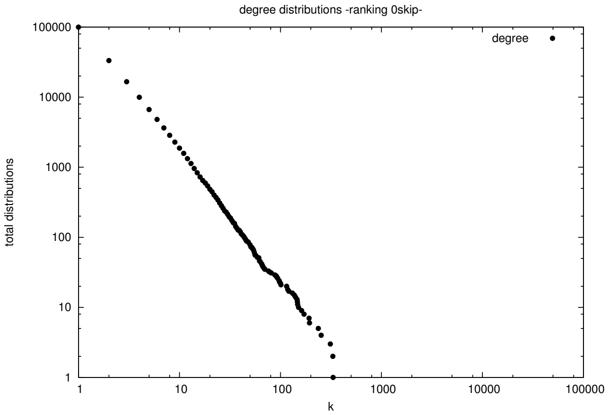

図 96: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-51-

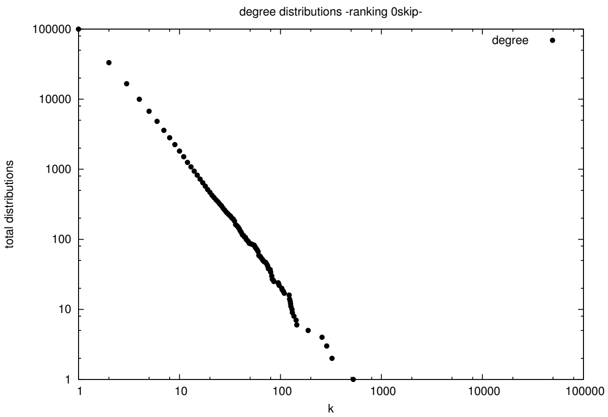

図 97: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-76-

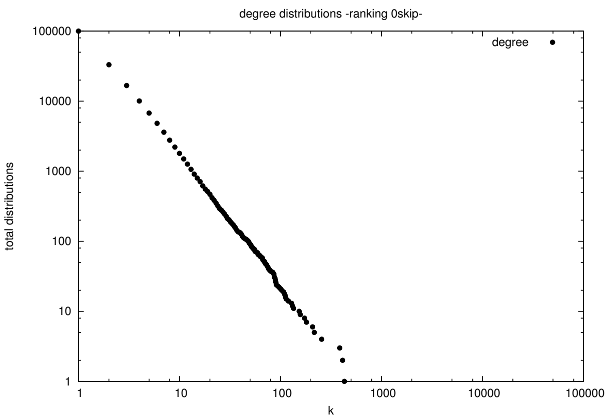

図 98: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-101-

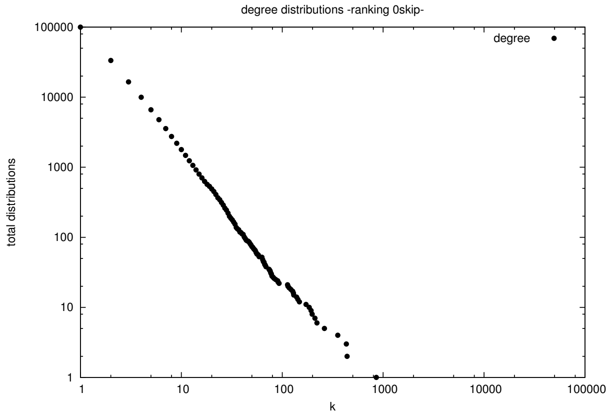

図 99: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-126-

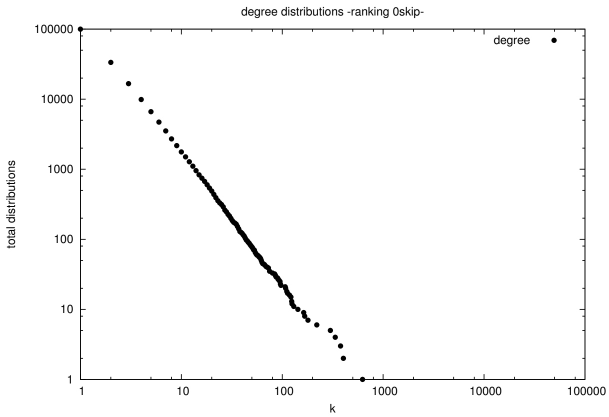

図 100: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-151-

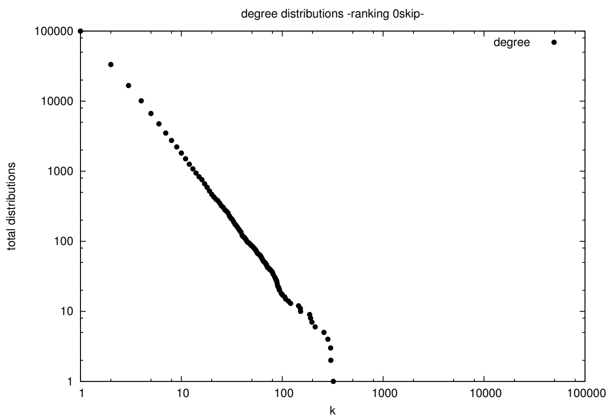

図 101: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-176-

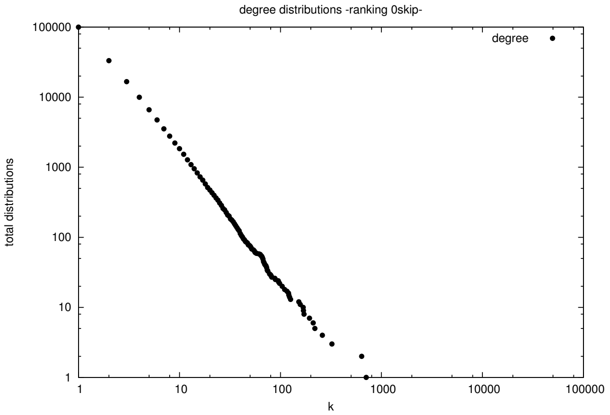

図 102: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-201-

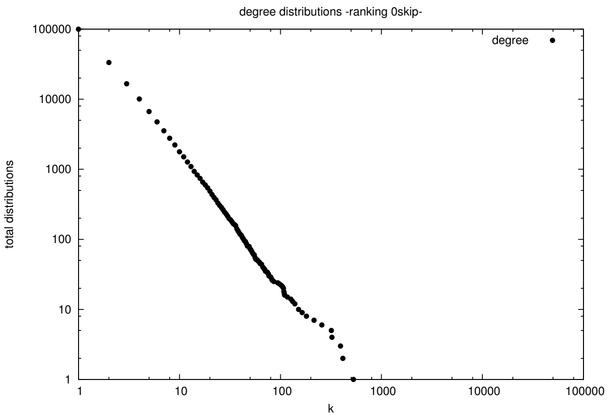

図 103: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-226-

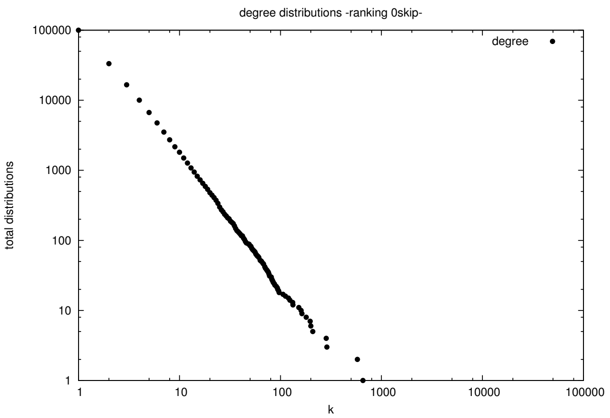

図 104: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-251-

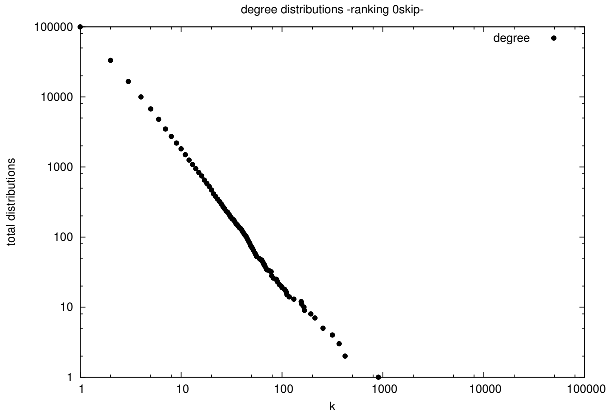

図 105: 頂点数 100000 の次数分布グラフ-276-

5.5 実験結果 -考察-

実験を行った結果次の結果を得た.5.2 節の図から, ネットワーク全体の直径, 半径,eccentricity の平均値は, 極めて小さいという結果が得られた.5.3 節の次数分布図の次数分布が, 直線を描いている事から, ベキ法則に従っている事と考えられる. この結果は,5.2 節,5.3 節共に, 頂点数が増加しても変化していない. また 5.1 節の可視化したネットワークの図を見ても, 一部の頂点に枝が集中している事が分かる. これらの結果から, 生成したネットワークは十分なスケールフリー性を満たしていると考えられる.

6 今後の課題

今回の実験では, 頂点数 1000,1 万,10 万のネットワークを修正版ＢＡモデルで各３００個生成し, 直感的にも判断できる様にネットワークを可視化, ネットワークの直径, 半径,eccentricity の平均値を計算し, これらの度数分布をグラフを描写, 次数分布を描写し, データの配置を調査する 3 種類の方法で判定計算機実験を行なった. その結果, 生成したネットワークは十分なスケールフリー性を満たしているという結果が得られた.

今後の課題としては, まず頂点数を増加しても同様の結果が得られるか検証する必要がある. また異なるネットワークモデルで直径, 半径,eccentricity の平均値を計算し, 今回の結果とはどのような違いがみられるのか判定実験することをあげたい. 例えば, ランダムネットワークとスモールワールドネットワークである. 最後に, 今回行なった次数分布を描写しデータの配置を調査する方法は厳密な判定方法ではない. そこで統計モデルで $P(k) \propto k^{-\gamma}, (\gamma > 0)$ の r を推定して検証する必要性がある.

参考文献

[1] 増田直紀, 今野紀雄 複雑ネットワ-ク 基礎から応用まで (近代科学社) 2010/4/26.

[2] Hiroshi Toyoizumi,Seiichi Tani,Optimal Spread over Finite-Size Statistical Network

[3] 小幡 正博 作, 伝播速度限定モデルにおける Scale Free Network 上の情報拡散 Dynamics (http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2012/kujira1220/obata_resume.pdf) 2013/1/30/15:45 UTC

[4] 蔡 延安 作, 伝播速度限定モデルにおける Scale Free ネットワーク上の情報拡散について (http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2012/choy/choy.pdf) 2013/1/30/15:45 UTC

[5] 伊藤大雄, 宇野裕之 編著 離散数学のすすめ (現代数学社) 2010/5/15.

[6] 今野紀雄, 井手 勇介 複雑ネットワーク入門 (KS 理工学専門書) 2008/05/13.

[7] アルバート・ラズロ・バラバシ 著, 青木薫 訳 新ネットワーク思考 -世界のしくみを読み解く (NHK 出版) 2002/12

[8] A.-L. Barabasi and R. Albert,Emergence of scaling in random networks.Sciende,286:509-512, (http://www.sciencemag.org/content/286/5439/509.short) 1999

[9] リック・デュレット 著, 竹居正登, 井手勇介, 今野紀雄 訳, ランダム グラフ ダイナミクス—確率論からみた複雑ネットワーク (産業図書) 2011/12/8.