

2月10日

有界な木幅を持つグラフの
Tutte多項式の計算アルゴリズムの実装と
彩色多項式への応用

谷研究室 中里啓応

目次

- 研究の背景と目的
- Tutte多項式
- Splitting formulas
- 彩色多項式への応用
- 今後の課題

研究の背景

彩色多項式の計算の勉強をした



彩色多項式はTutte多項式の特殊化

研究の目的

『 An algorithm for the Tutte polynomials
of graphs of bounded treewidth』

著 : Artur Andrzejak

の、有界な木幅を持つグラフのTutte多項式を
多項式時間で求めるプログラムを実装し、
それを、彩色多項式へ応用する

目次

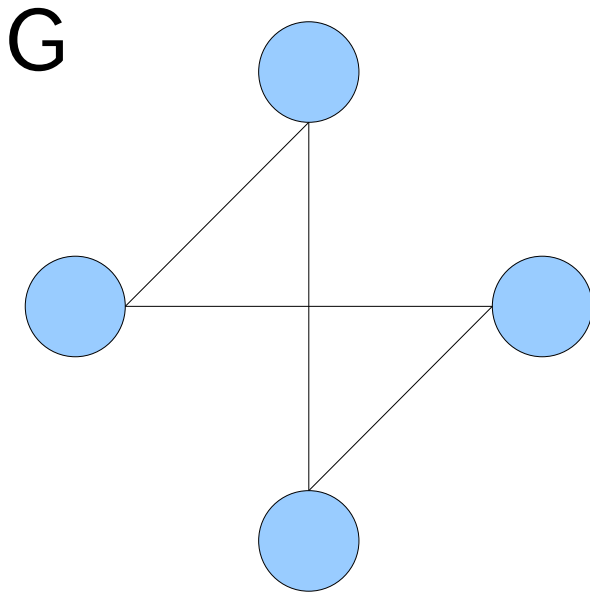
- 研究の背景と目的
- Tutte多項式
- Splitting formulas
- 実験結果
- 今後の課題

Tutte多項式とは？

Tutte多項式とは、グラフ不変量で、
Tutte多項式が求まると、様々な問題に応用できる

例

グラフGの全域木の数、 $t(G; 1, 1)$ で求めることができる



$$t(G) = x^3 + x^2 + x + y$$

このグラフの全域木の数、

$1+1+1+1 = 4$ つだということが分かる

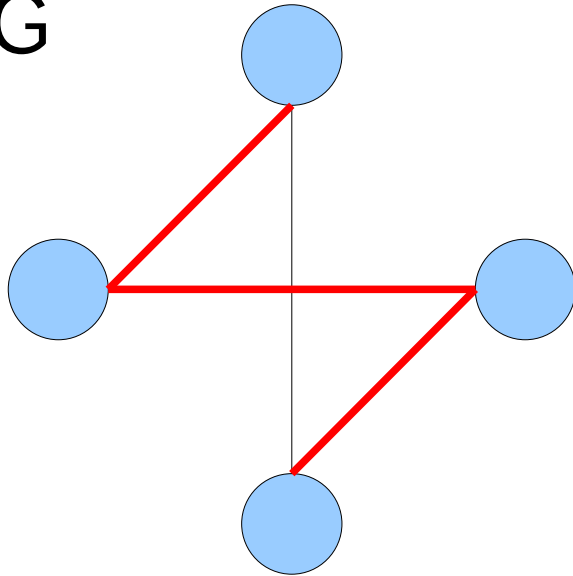
Tutte多項式とは？

Tutte多項式とは、グラフ不変量で、
Tutte多項式が求まると、様々な問題に応用できる

例

グラフGの全域木の数、 $t(G; 1, 1)$ で求めることができる

G



$$t(G) = x^3 + x^2 + x + y$$

このグラフの全域木の数、

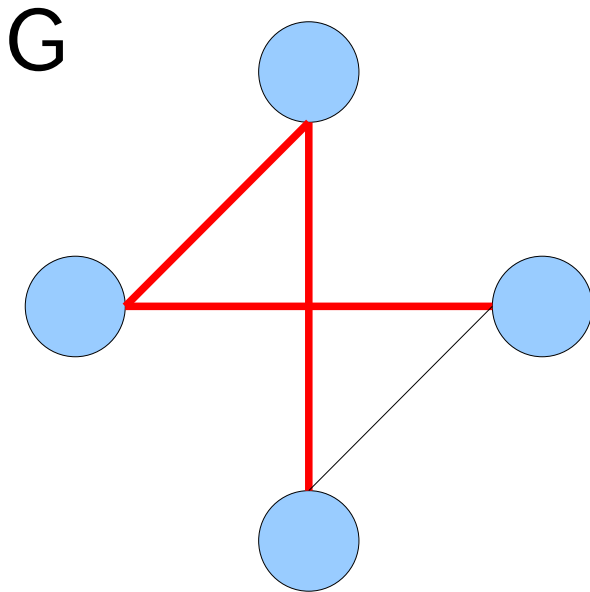
$1+1+1+1 = 4$ つだということが分かる

Tutte多項式とは？

Tutte多項式とは、グラフ不変量で、
Tutte多項式が求まると、様々な問題に応用できる

例

グラフGの全域木の数、 $t(G; 1, 1)$ で求めることができる



$$t(G) = x^3 + x^2 + x + y$$

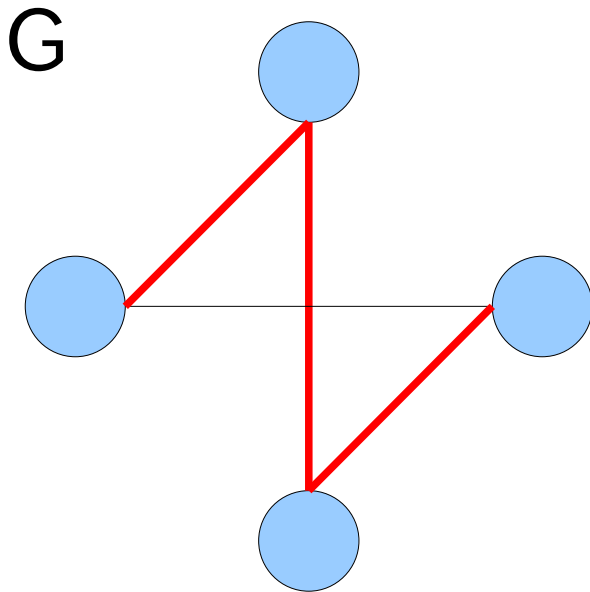
このグラフの全域木の数、
 $1+1+1+1 = 4$ つだということが分かる

Tutte多項式とは？

Tutte多項式とは、グラフ不変量で、
Tutte多項式が求まると、様々な問題に応用できる

例

グラフGの全域木の数、 $t(G; 1, 1)$ で求めることができる



$$t(G) = x^3 + x^2 + x + y$$

このグラフの全域木の数、

$1+1+1+1 = 4$ つだということが分かる

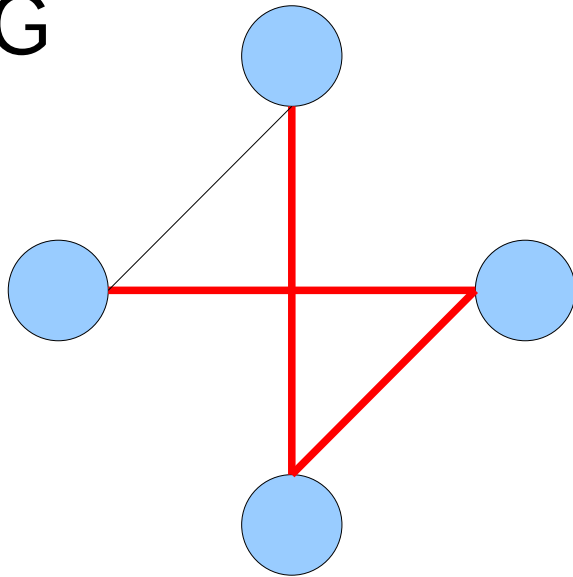
Tutte多項式とは？

Tutte多項式とは、グラフ不変量で、
Tutte多項式が求まると、様々な問題に応用できる

例

グラフGの全域木の数、 $t(G; 1, 1)$ で求めることができる

G



$$t(G) = x^3 + x^2 + x + y$$

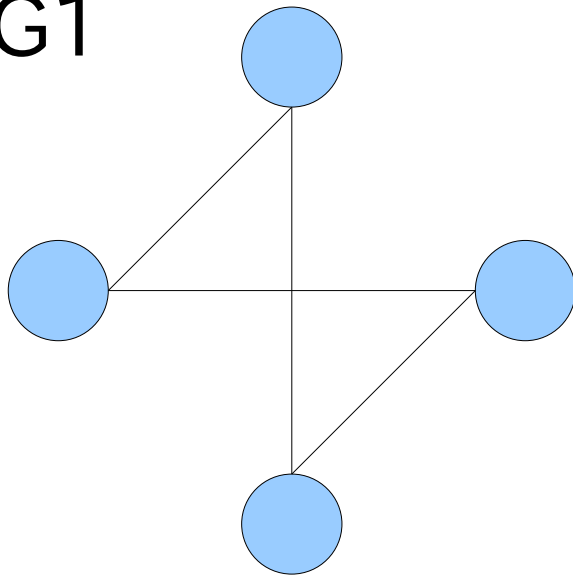
このグラフの全域木の数、

$1+1+1+1 = 4$ つだということが分かる

Tutte多項式とは？

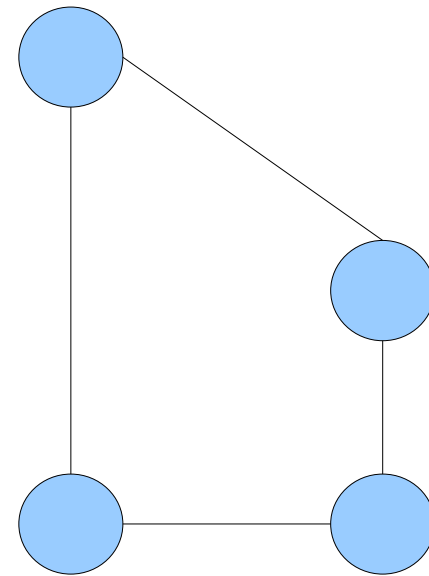
同型なグラフ $\longrightarrow$ 同じ多項式になる

G1



同型

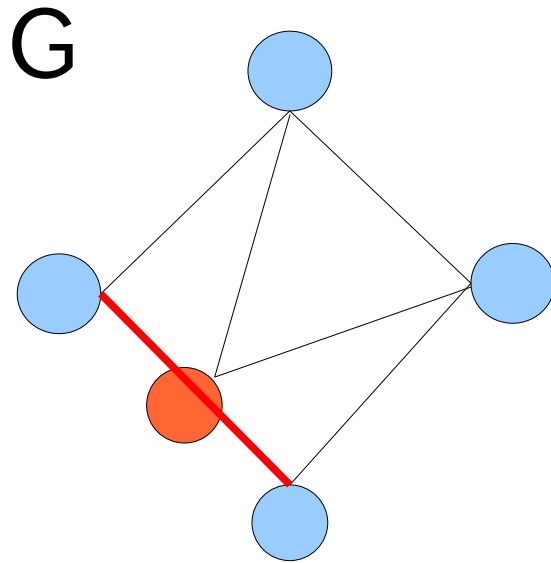
G2



$$t(G1) = t(G2) = x^3 + x^2 + x + y$$

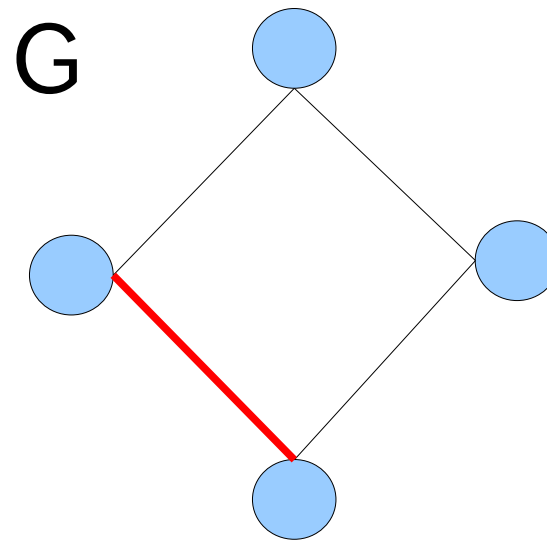
Tutte多項式の定義

辺の「縮約」



G/e

辺の「削除」



$G \setminus e$

Tutte多項式の定義

G : グラフ

$e \in E(G)$

G に辺が無いなら $t(G) = 1$

(1) 辺 e がループでもブリッジでもない場合

(2) 辺 e がブリッジの場合

(3) 辺 e がループの場合

Tutte多項式の定義

G : グラフ

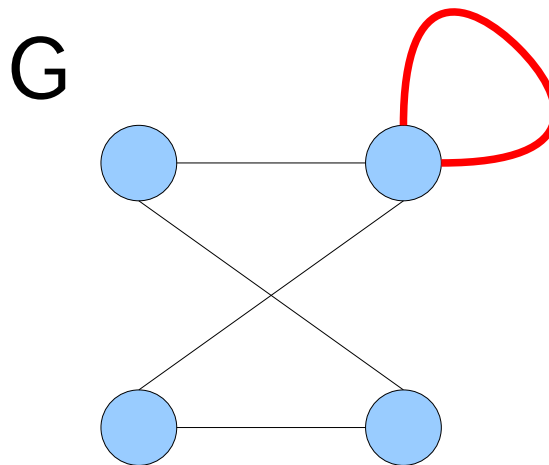
$e \in E(G)$

G に辺が無いなら $t(G) = 1$

(1) 辺 e が **ループ** でもブリッジでもない場合

(2) 辺 e がブリッジの場合

(3) 辺 e がループの場合



Tutte多項式の定義

G : グラフ

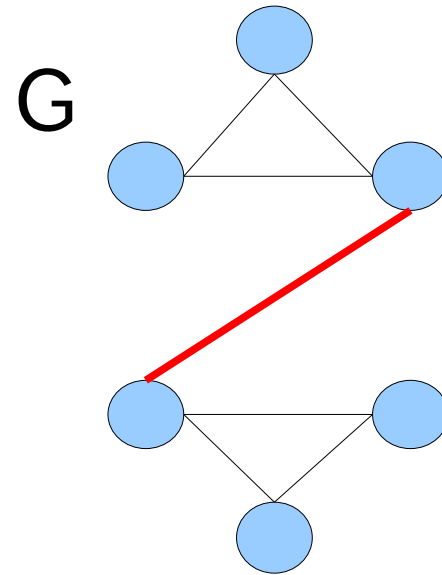
$e \in E(G)$

G に辺が無いなら $t(G) = 1$

(1) 辺 e がループでも **ブリッジ** でもない場合

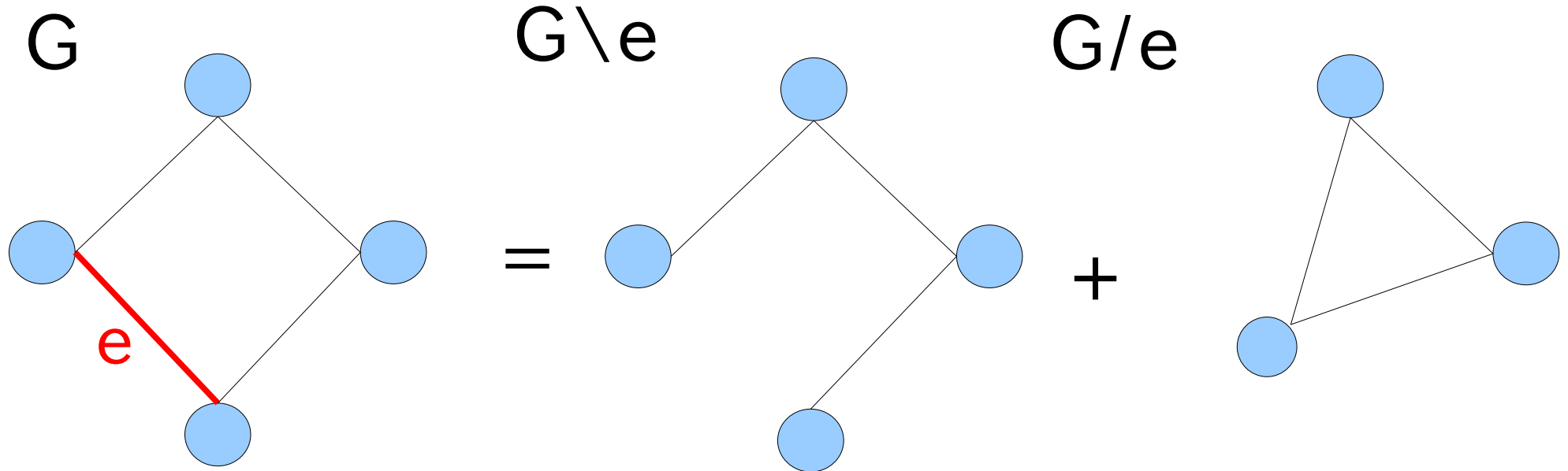
(2) 辺 e がブリッジの場合

(3) 辺 e がループの場合



Tutte多項式の定義

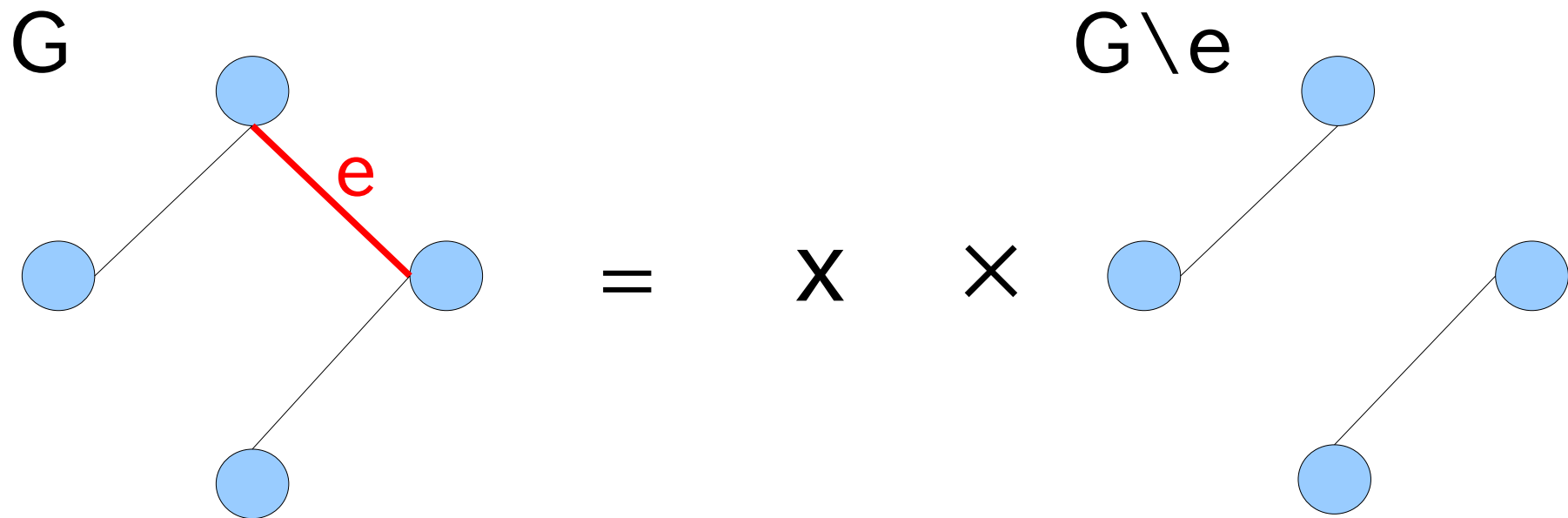
(1) 辺 e がループでもブリッジでもない場合



$$t(G) = t(G \setminus e) + t(G/e)$$

Tutte多項式の定義

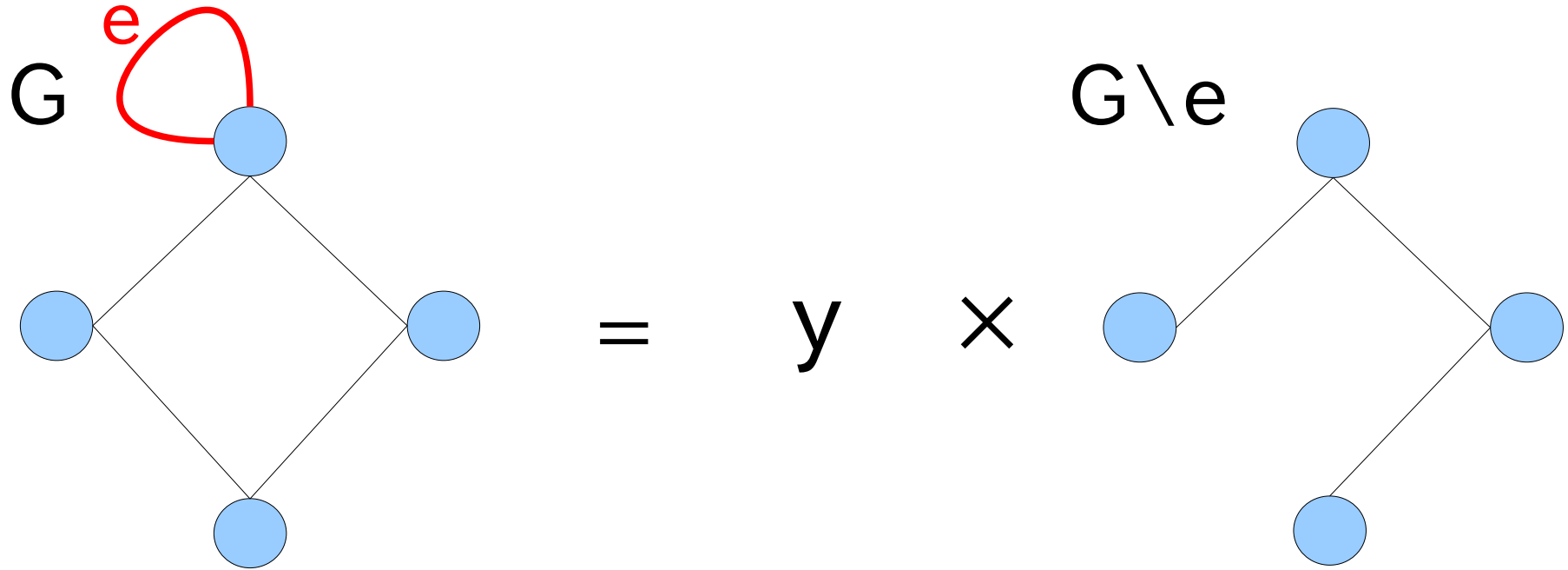
(2) 辺 e がブリッジの場合



$$t(G) = xt(G \setminus e)$$

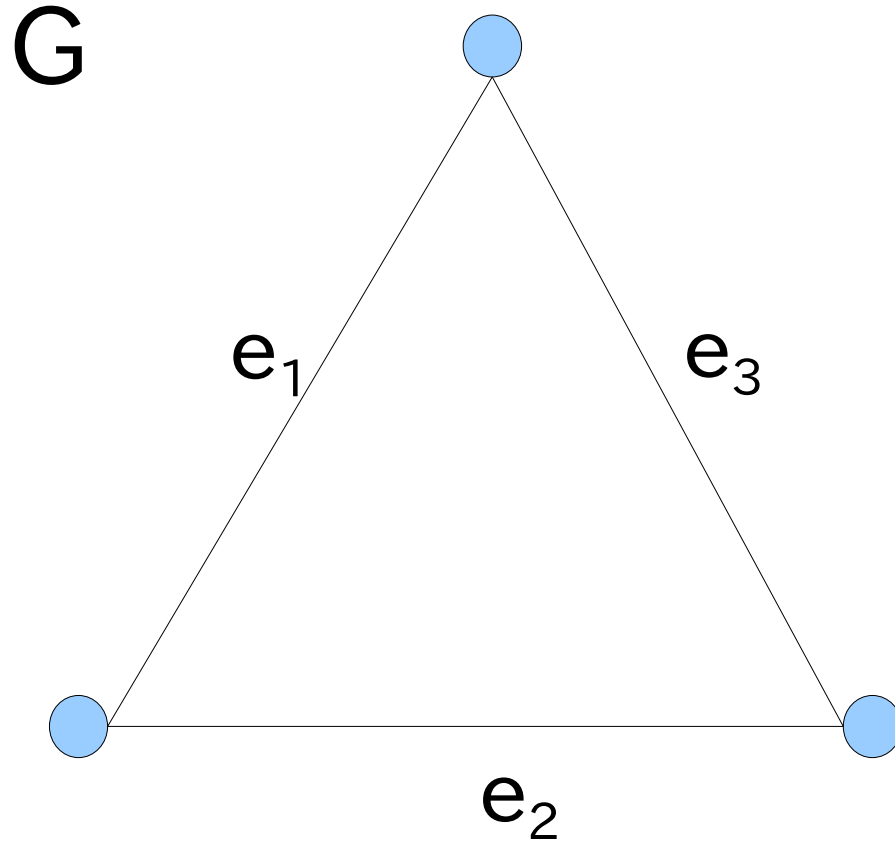
Tutte多項式の定義

(3) 辺 e がループ

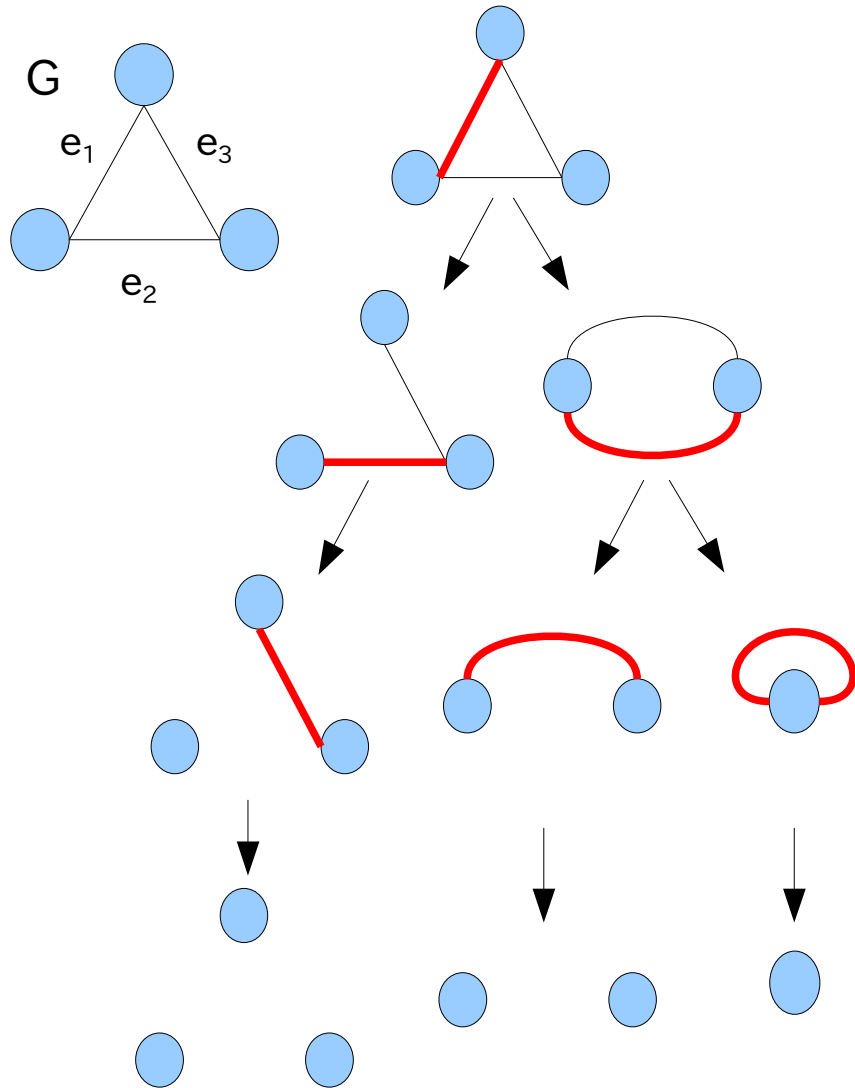


$$t(G) = yt(G \setminus e)$$

Tutte多項式の定義

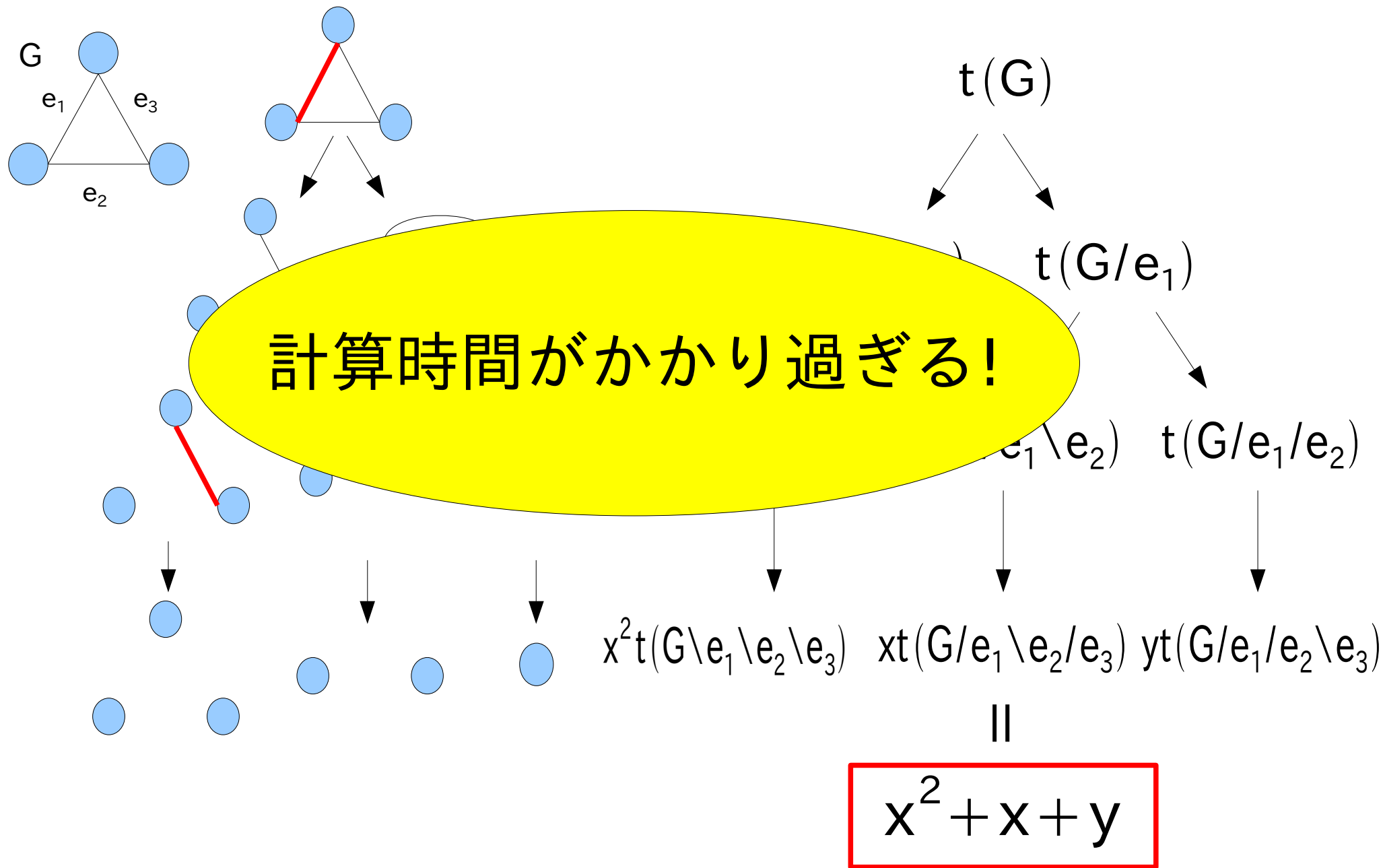


Tutte多項式の定義



$$\begin{array}{c}
 t(G) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 t(G \setminus e_1) \quad t(G / e_1) \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 xt(G \setminus e_1 \setminus e_2) \quad t(G / e_1 \setminus e_2) \quad t(G / e_1 / e_2) \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 x^2 t(G \setminus e_1 \setminus e_2 \setminus e_3) \quad xt(G / e_1 \setminus e_2 / e_3) \quad yt(G / e_1 / e_2 \setminus e_3) \\
 \parallel \\
 \boxed{x^2 + x + y}
 \end{array}$$

Tutte多項式の定義



有界な木幅を持つグラフに対して考える



木分解の深さ優先探索アルゴリズム
+
splitting formula
(Negami)

目次

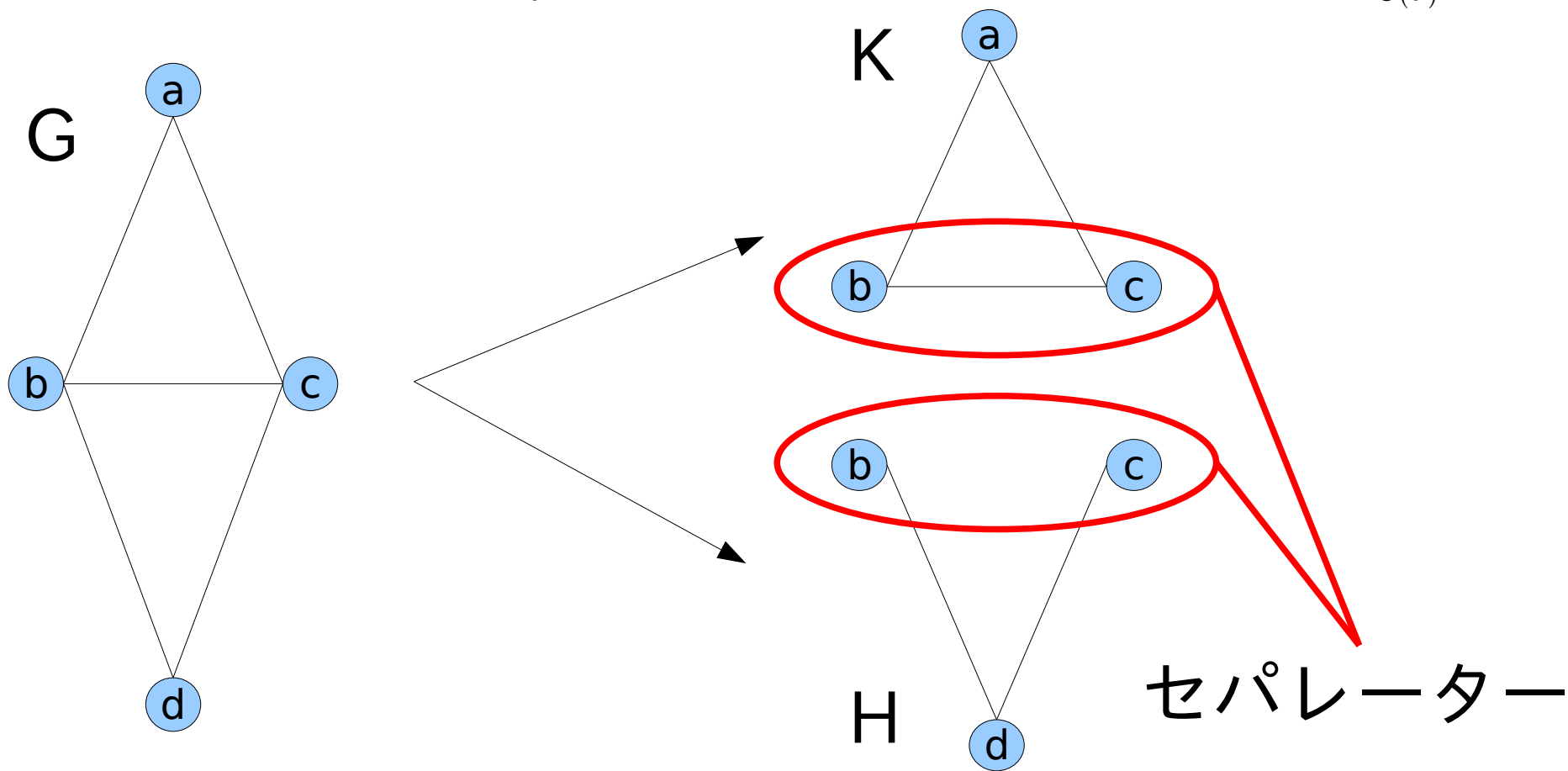
- 研究目的
- Tutte多項式
- Splitting formula
- 彩色多項式への応用
- 今後の課題

Splitting formula

$$t(G; x, y) = (x-1)^{-c(G)} k_r C_r h_r^T$$

$$k_r = [(x-1)^{c(K//P_1)} t(K//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(K//P_{s(r)})} t(K//P_{s(r)}; x, y)]$$

$$h_r = [(x-1)^{c(H//P_1)} t(H//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(H//P_{s(r)})} t(H//P_{s(r)}; x, y)]$$

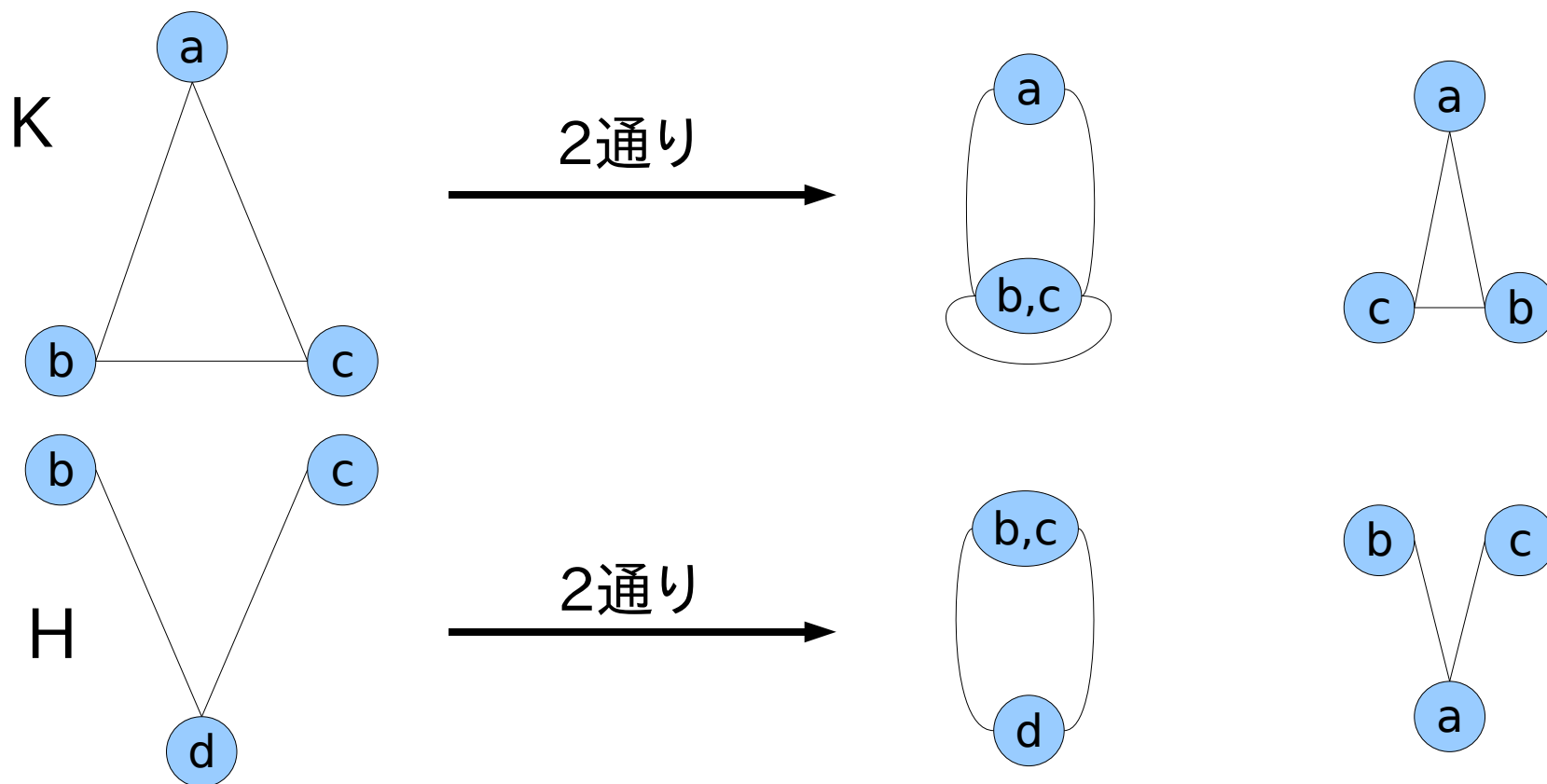


Splitting formula

$$t(G; x, y) = (x-1)^{-c(G)} k_r C_r h_r^T$$

$$k_r = [(x-1)^{c(K//P_1)} t(K//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(K//P_{s(r)})} t(K//P_{s(r)}; x, y)]$$

$$h_r = [(x-1)^{c(H//P_1)} t(H//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(H//P_{s(r)})} t(H//P_{s(r)}; x, y)]$$



3の場合 = 5通り

4の場合 = 15通り

5の場合 = 52通り

6の場合 = 203通り

7の場合 = 877通り

8の場合 = 4140通り

9の場合 = 21147通り

10の場合 = 115975通り

11の場合 = 678570通り

12の場合 = 4213597通り

木幅を制限



セパレーターの大きさも制限

実験結果

木幅を2に制限したグラフ

頂点数 10

辺数	11	13	15	16
基本アルゴリズム	0.07(s)	0.22(s)	0.81(s)	1.76(s)
Splitting formula	0.01(s)	0.01(s)	0.02(s)	0.02(s)

頂点数 12

辺数	17	18	19	20
基本アルゴリズム	2.34(s)	9.63(s)	19.06(s)	42.43(s)
Splitting formula	0.02(s)	0.03(s)	0.04(s)	0.05(s)

頂点数 14

辺数	17	20	21	23
基本アルゴリズム	7.46(s)	53.55(s)	101.91(s)	417.46(s)
Splitting formula	0.05(s)	0.06(s)	0.04(s)	0.09(s)

目次

- 研究の背景と目的
- Tutte多項式
- Splitting formula
- 彩色多項式への応用
- 今後の課題

彩色多項式への応用

彩色多項式は… Tutte多項式の特殊化

G : グラフ

λ : 色数

$P(G; \lambda)$: chromatic polynomial (彩色多項式)

$$P(G; \lambda) = (-1)^{r(E)} \lambda^{k(G)} T(G; 1 - \lambda, 0)$$

$$P(G; \lambda) = (-1)^{r(E)} \lambda^{k(G)} T(G; 1 - \lambda, 0)$$

目次

- 研究の背景と目的
- Tutte多項式
- Splitting formula
- 彩色多項式への応用
- 今後の課題

今後の課題

- ・木幅の制限を緩めたプログラムを作り、比較実験する
- ・彩色多項式以外のものにも応用してみる

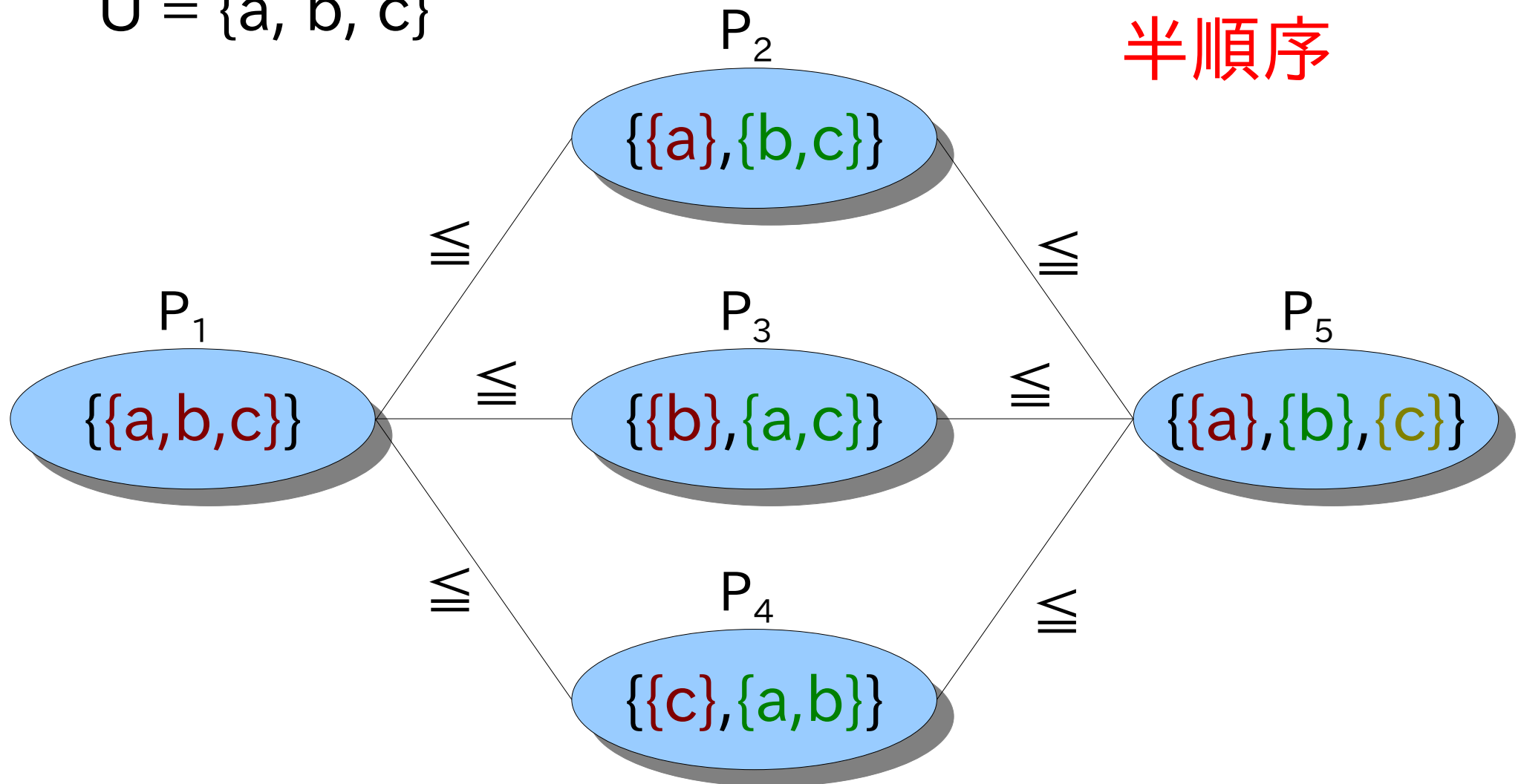
FIN

セパレーターの分割と順序付け

U: セパレーターの集合

$U = \{a, b, c\}$

半順序

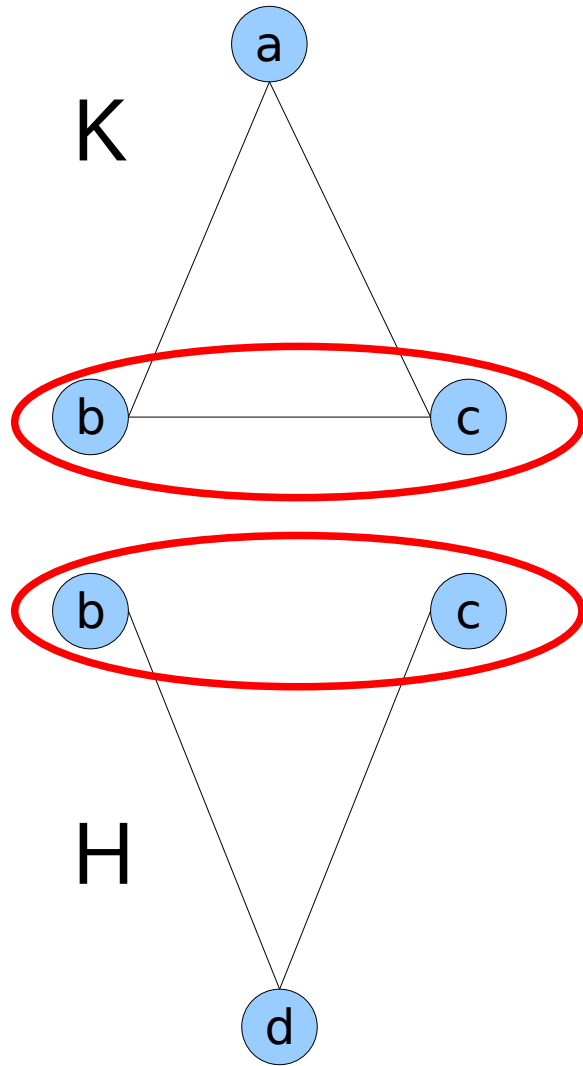


木幅2のグラフでの応用

結び目

木幅2のグラフになるので、木幅を2に制限しても十分に実用できる

セパレーターの分割と順序付け



大きさ2のセパレーター

$$U = \{b, c\}$$

$$P_1 = \{\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}\}$$

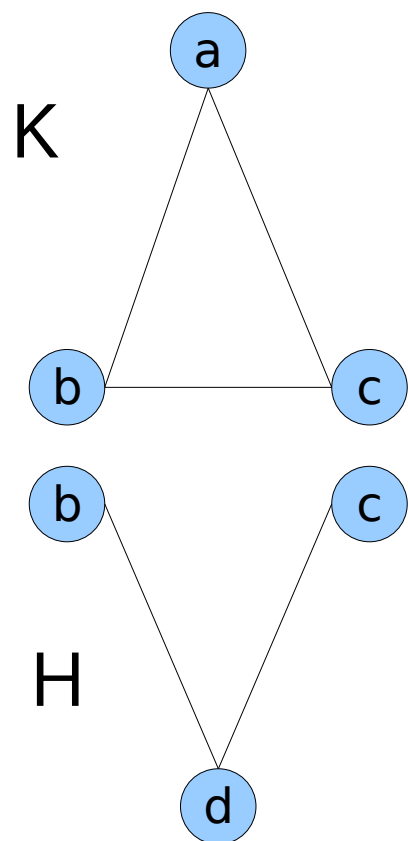
$$P_2 = \{\{\mathbf{b}\}, \{\mathbf{c}\}\}$$

Splitting formula

$$t(G; x, y) = (x-1)^{-c(G)} k_r C_r h_r^T$$

$$k_r = [(x-1)^{c(K//P_1)} t(K//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(K//P_{s(r)})} t(K//P_{s(r)}; x, y)]$$

$$h_r = [(x-1)^{c(H//P_1)} t(H//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(H//P_{s(r)})} t(H//P_{s(r)}; x, y)]$$

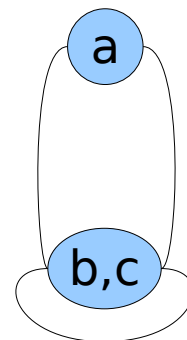


$$P_1 = \{\{b, c\}\}$$

$$P_2 = \{\{b\}, \{c\}\}$$



$K//P_1$



$K//P_2$

$H//P_1$

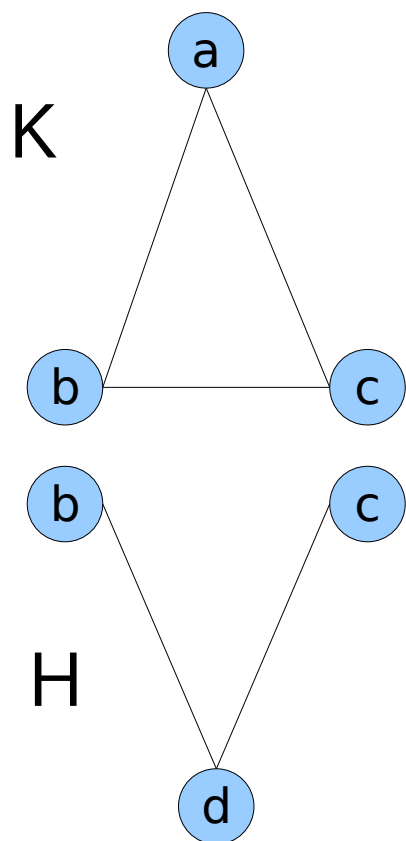
$H//P_2$

Splitting formula

$$t(G; x, y) = (x-1)^{-c(G)} k_r C_r h_r^T$$

$$k_r = [(x-1)^{c(K//P_1)} t(K//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(K//P_{s(r)})} t(K//P_{s(r)}; x, y)]$$

$$h_r = [(x-1)^{c(H//P_1)} t(H//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(H//P_{s(r)})} t(H//P_{s(r)}; x, y)]$$

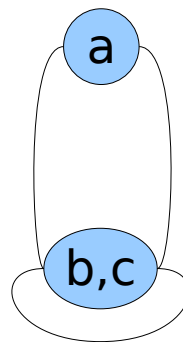


$$P_1 = \{\{b, c\}\}$$

$$P_2 = \{\{b\}, \{c\}\}$$

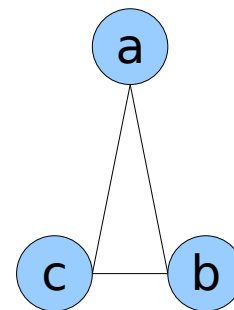


$K//P_1$



$H//P_1$

$K//P_2$



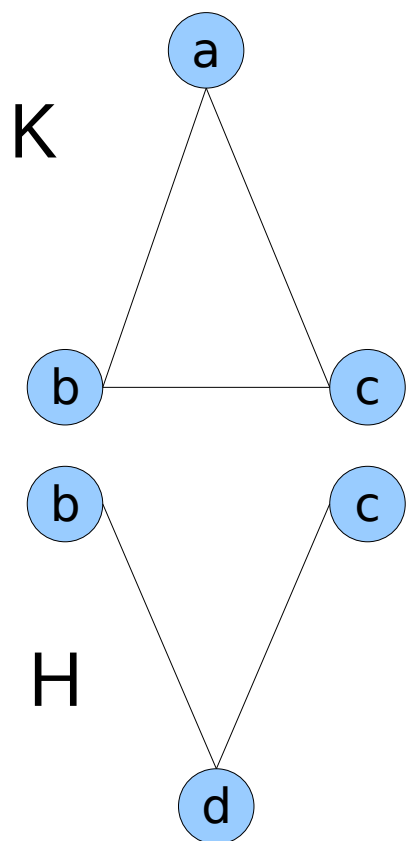
$H//P_2$

Splitting formula

$$t(G; x, y) = (x-1)^{-c(G)} k_r C_r h_r^T$$

$$k_r = [(x-1)^{c(K//P_1)} t(K//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(K//P_{s(r)})} t(K//P_{s(r)}; x, y)]$$

$$h_r = [(x-1)^{c(H//P_1)} t(H//P_1; x, y), \dots, (x-1)^{c(H//P_{s(r)})} t(H//P_{s(r)}; x, y)]$$

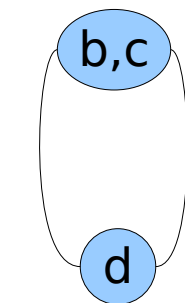
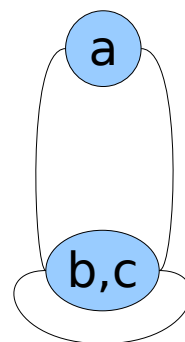


$$P_1 = \{\{b, c\}\}$$

$$P_2 = \{\{b\}, \{c\}\}$$

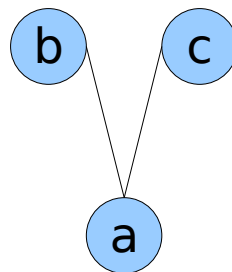
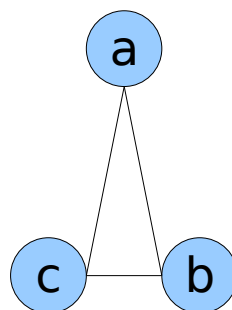


$K // P_1$



$H // P_1$

$K // P_2$



$H // P_2$