

有界の木幅を持つグラフの Tutte 多項式の計算と 彩色多項式への応用

computation Tutte polynomial of graphs of bounded treewidth
and Its Application to chromatic polynomial

<http://www.tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp/g-2007/hiromu/>

谷 研究室 中里 啓応

hiromu nakazato

概要

Artur Andrzejak の論文に書かれている splitting formulas という概念を使って、有界の木幅を持つグラフの Tutte 多項式の計算アルゴリズムを実装し、さらにそれを利用して彩色多項式を計算するプログラムを作成し、実験的に性能を評価する。

1 Tutte 多項式

Tutte 多項式とは、マトロイドと呼ばれるデータ構造の不変量である。

1.1 マトロイドとは？

ベクトル空間における線形独立集合のもつ組み合わせ的な性質は、マトロイドと呼ばれる抽象的な離散構造として表現される。マトロイドは単純な公理によって定義されているにもかかわらず、豊かな構造をもっており、基本的な離散構造と考えられている。とくに、離散最適化の分野においては、マトロイド構造と高速アルゴリズムは不可分の関係にある。

1.2 マトロイドの定義

有限集合 V 上の集合族 τ 、集合族 β 、集合族 $\mathcal{C}$ 、集合関数 ρ に関する条件を定義する。

τ : 独立集合の全体

独立集合族 τ は次の組合せ的な性質をもっている：

- (I1) 空集合は τ に含まれる、
- (I2) $Y \in \tau$ かつ $X \subseteq Y$ ならば $X \in \tau$ 、
- (I3) $X, Y \in \tau$ かつ $|X| < |Y|$ ならば
 $X \cup \{y\} \in \tau$ を満たす $y \in Y \setminus X$ が存在する。

β : 基 (極大独立集合) の全体

基族 β は、(同時) 交換公理と呼ばれる次の性質を持っている：

- (B) 任意の $B, B' \in \beta$ と $i \in B \setminus B'$ に対して、
ある $j \in B' \setminus B$ が存在して $(B \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \beta$
かつ $(B' \cup \{i\}) \setminus \{j\} \in \beta$ 。

$\mathcal{C}$: サーキット (極小従属集合) の全体

サーキット族 $\mathcal{C}$ は、次の性質をもっている：

- (C1) 空集合は $\mathcal{C}$ に含まれない、
- (C2) $C, C' \in \mathcal{C}$ かつ $C \subseteq C'$ ならば $C = C'$ 、
- (C3) 任意の相異なる $C, C' \in \mathcal{C}$ と任意の $i \in C \cap C'$ に対して、
 $C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{i\}$ を満たす $C'' \in \mathcal{C}$ が存在する。

列ベクトル線形独立性は、

$$\rho(X) = \text{rank}\{a_j | j \in X\} \quad (X \subseteq V)$$

で定義される階数関数 $\rho : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}$ によっても表現される。階数関数には次の性質がある：

- (R1) $0 \leq \rho(X) \leq |X|$ 、
- (R2) $X \subseteq Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y)$ 、
- (R3) $\rho(X) + \rho(Y) \leq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ 。

この、(I) を満たす τ 、(B) を満たす β 、(C) を満たす $\mathcal{C}$ 、(R) を満たす ρ は、離散構造としては、同値であって、互いに他を一意的に定めることが知られている。この意味で、条件 (I),(B),(C),(R) は同一の離散構造の表現である。これをマトロイドと呼び、 (V, τ) 、 (V, β) 、 $(V, \tau, \beta, \mathcal{C}, \rho)$ 、 (V, τ, ρ) などと書き表す。また、 V を台集合、 τ を独立集合族、 β を基族、 $\mathcal{C}$ をサーキット族、 ρ を階数関数と呼ぶ。

1.3 マトロイドの例

グラフ G に対して、極大木 (の辺集合) の全体 τ は上の条件 (B) を満たす。したがって、 G の辺集合を台集合とし、 τ を基族とするマトロイドが定まる。このマトロイドにおけるサーキットは G における単純な閉路 (サーキット) に対応している。

1.4 Tutte 多項式

$A \subseteq E(G)$ の時、 A の階数関数 $r(A)$ は次のように定義できる ($k(A)$ は、グラフ $G:A$ (頂点集合 $V=V(G)$ 、辺集合 A) の連結成分の数)

$$r(A) = |V(G)| - k(A),$$

この、階数関数 $r(A)$ は、マトロイドの条件 (R) を満たすので、マトロイドである。このマトロイド $M = (E, r)$ の Tutte 多項式 $T(G; x, y)$ は以下のように二つの形式で表される、

$$\begin{aligned} T(M; x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\ &= \sum_{i,j} t_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

2 The splitting formula

Tutte 多項式を上記の方法で求める場合、辺集合のすべての部分集合について考えなければならないので、計算時間が指数時間になってしまう。そのために、有界の木幅を持つグラフを考え、木分解の深さ優先探索アルゴリズムに、Splitting formula という概念を組み込むことで、Tutte 多項式を多項式時間で求めていく。

2.1 準備

有限集合 Y の互いに素な空集合でない部分集合の集合 $\{Y_i | i \in \{1, \dots, k\}\}$ ($Y = \bigcup_{i=1}^k Y_i, k \in \{1, \dots, |Y|\}$) を Y の *partition* $P(Y)$ と呼ぶ。 Y_i を $P(Y)$ の *block* と呼び、 $|P(Y)| = k$ は *block* 数を表す。もし、*partition* $P_1(Y)$ のそれぞれの *block* が、*partition* $P_2(Y)$ の *block* の和集合になるなら、 $P_2(Y)$ は、 $P_1(Y)$ の *refinement* である。 Y の全ての *partition* の集合 $\Gamma(Y)$ は、関係 $\prec (P_2(Y) \text{ が } P_1(Y) \text{ の refinement なら, } P_1(Y) \prec P_2(Y))$ によって順序付けすることが可能である。その時、 $(\Gamma(Y), \prec)$ は、 *lattice* になり、 Y の *partition lattice* と呼ばれる。明らかに、 $(\Gamma(Y), \prec)$ の極大の要素は、 $|Y|$ の単集合の *block* からなる Y の *partition* である。 r 個の要素を持つ集合の *partition* の数は、 $s(r)$ と表す。

2.2 Splitting formula

K と H は、 $E(K) \cap E(H) = \emptyset$ となる 2 つのグラフとし、 $G = K \cup H$ とする。集合 $U = V(K) \cap V(H)$ を K と H の *separator* と呼ぶ。 $r = |U|$ とする。 $r = 1$ の時は、 $T(K; x, y)$ に、 $T(H; x, y)$ をかけることによって G の Tutte 多項式が得られる。

r は少なくとも 2 以上とする。 $(\Gamma(U), \prec)$ は、 U の *partition lattice* とする。 $s(r)$ は、 $\Gamma(U)$ の *partition* の数である。明らかに、 $(\Gamma(U), \prec)$ は G ではなく、 r だけにより決まる。 $P_i, P_j \in \Gamma(U)$ に対して、 $P_j \prec P_i$ は、 $j \leq i$ となるように、 $\Gamma(U)$ の要素に添え字付けをする。

T_r は、 (i, j) - 成分が、 $t^{|P_i \wedge P_j|}$ (t は変数) となる行列である。 T_r の T_r^{-1} は、存在する。 C_r は、 (i, j) - 成分が、 $(y-1)^{|P_i|+|P_j|-r} B_{ij}$ となる $s(r) \times s(r)$ の行列で、 B_{ij} は、 t を $(x-1)(y-1)$ に置き換えた T_r^{-1} の (i, j) - 成分である。

partition $P \in \Gamma(U)$ に対して、 P の同じ *block* の中にある、 U のそれぞれの頂点の部分集合を同一視することで、 K から得られるグラフを $K//P$ と表す。同様に、 *partition* P' に対して、 $H//P'$ も定義できる。
Theorem1 G の Tutte 多項式は、以下の *the splitting formula* で求められる。

the splitting formula:

$$t(G; x, y) = (x-1)^{-c(G)} k_r C_r h_r^T,$$

$$\begin{aligned} k_r &= [(x-1)^{c(K//P_1)} t(K//P_1; x, y), \\ &\quad \dots, (x-1)^{c(K//P_{s(r)})} t(K//P_{s(r)}; x, y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_r &= [(x-1)^{c(H//P_1)} t(H//P_1; x, y), \\ &\quad \dots, (x-1)^{c(H//P_{s(r)})} t(H//P_{s(r)}; x, y)]. \end{aligned}$$

3 彩色多項式への応用

3.1 Tutte 多項式を用いた彩色彩色多項式

G : グラフ、 λ : 色数、

$$P(G; \lambda) = (-1)^{r(E)} \lambda^{k(G)} T(G; 1 - \lambda, 0).$$

参考文献

- [1] A. Andrzejak, An algorithm for the Tutte polynomials of graphs of bounded treewidth, *Discrete Math.* **190** (1998), 39-54.
- [2] J. Oxley and D. Welsh, Chromatic, Flow, and Reliability Polynomials: the Complexity of their Coefficients, (2001).
- [3] <http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/murota/lect-kisosuri/matroid041214.pdf>