

ダイアグラムから作成する結び目の近傍抜き出しソフト ウェア

Neighborhood pulling out software made from diagram

谷 研究室 加藤 浩平
Kohei Kato

概要

結び目をダイアグラムで扱い三角形分割をして平面に埋め込み、近傍を描画する

1 はじめに

自明性判定は結び目理論の基本的問題である。自明性判定とは自明な結び目との同型判定である。結び目の自明性判定において結び目の近傍を抜き出した空間を得ることは非常に有用である

そこで近傍を抜き出すために結び目をダイアグラムとして扱い三角形分割をしてすべての辺が直線かつ交差しない座標をあたえて平面に埋め込み近傍を描画する。

2 Fray embedding について

すべての辺が直線かつ交差しない座標ををあたえて平面に埋め込むことを Fray embedding とする。

3 How to draw a planar graph on a grid

3.1 Theorem 1

n 頂点からなる、あらゆる平面的グラフは $(2n-4) \times (n-2)$ の grid 上に Fray embedding を持つ。

3.2 Lemma 2

G を平面に埋め込まれた平面的グラフとし、 $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$ を G のサイクルとする。 u でも v でもないある頂点 w' がサイクル $u_1, \dots, u_k$ に存在し、 w' はサイクル $u_1, \dots, u_k$ のあらゆる inside chord と隣接しない。同様に、 u でも v でもないある頂点 w'' がサイクル $u_1, \dots, u_k$ 上に存在し、 w'' はサイクル $u_1, \dots, u_k$ のあらゆる outside chord と隣接しない。

証明 G が inside chord や outside chord を持たないとき、この Lemma が成り立つのは明らか。持つとき、 (u_i, u_j) を $j-i$ が最小であるような inside chord とする ($j > i+1$)。 $j-i$ の最小性から u_{i+1} はサイクル $u_i, \dots, u_j$ のあらゆる inside chord に接続しない。また、 G が平面に埋め込まれている為、 u_{i+1} はサイクル $u_1, \dots, u_k$ のあらゆる inside chord に接続しない。 outside chord に関しても同様。 $\square$

3.3 Lemma 3

(Canonical representation lemma for plane graphs)
 G を平面に埋め込まれた n 頂点極大平面的グラフとし、 exterior face を u, v, w とする。 $4 \leq k \leq n$ に対して、 (i), (ii) を満たす cannical labeling $v_1 = u, v_2 = v, \dots, v_n = w$ が存在する。

1. $v_1, \dots, v_{k-1}$ によって誘導される G の部分グラフ G_{k-1} は 2 連結で、 G_{k-1} の exterior face の境界は辺 uv を含んだサイクル C_{k-1} となる。
2. v_k は G_{k-1} の exterior face に存在し、 $N_{G_k}(v_k)$ はパス $C_{k-1} - uv$ の連続した 2 つ以上の頂点となる。

証明 $v_n, \dots, v_1$ の順に定義出来る事を示す。

$v_n = w$ としたとき、 G_{n-1} は (i), (ii) を満たす事を示す。 G_{n-1} は $G - w$ であり、 G の極大平面性から G_{n-1} の exterior face の境界は辺 uv を含んだサイクル C_{n-1} であり、 $N_G(w)$ はパス $C_{n-1} - uv$ の頂点となっている。また、 $N_G(w)$ は u, v を含むので $|N_{G_n}(v_n)| \geq 2$ である。 v_n は G_{n-1} の exterior face に存在する。また、 Lemma2 より、 C_{n-1} にある頂点 w_{n-1} が存在して、 w_{n-1} は C_{n-1} のあらゆる inside chord に接続しない。 w_{n-1} と w_{n-1} 以外の任意の C_{n-1} の頂点の間に辺が存在する様に、 G_{n-1} に outside code を加えて得られるグラフを G'_{n-1} とする。 G'_{n-1} は極大平面的となり 3 連結。 G_{n-1} は 2 連結。

$i < n$ とし、任意の $k > i$ に対して、 v_k は既に定義されていて、 $V(G) \setminus \{v_k, \dots, v_n\}$ によって誘導される G の部分グラフ G_{k-1} は (i), (ii) を満たすと仮定する。適当に v_i を定義する事によって、 G_{i-1} も (i), (ii) を満たす事を示す。 C_i は outer chord を持たないサイクルであり、 Lemma 2 より、 u でも v でもないある頂点 w_i が C_i に存在し、 w_i は C_i のあらゆる inside chord と隣接しない。 $v_i = w_i$ とし、 $G_{i-1} = G_i - v_i$ とする。 G_i の

inner face はすべて 3 角形なので G_{i-1} の exterior face の境界は辺 uv を含んだサイクル C_{i-1} であり, $N_G(v_i)$ はパス $C_{i-1} - uv$ の連続した頂点となっている. また, v_i は C_i の頂点なので $|N_{G_i}(v_i)| \geq 2$. v_i は G_{i-1} の exterior face に存在する. また, Lemma 2 より, C_{i-1} にある頂点 w_{i-1} が存在して, w_{i-1} は C_{i-1} のあらゆる inside chord に接続しない. w_{i-1} と w_{i-1} 以外の任意の C_{i-1} の頂点の間に辺が存在する様に, G_{i-1} に outside code を加えて得られるグラフを G'_{i-1} とする. G_{i-1} の inner face はすべて 3 角形なので G'_{i-1} は極大平面的となり 3 連結. G_{i-1} は 2 連結. $\square$

定理 1 の証明 極大平面的グラフに対して示せば十分. G を極大平面的グラフ, u, v, w をその exterior face とし, $v_1 = u, \dots, v_n = w$ を G の canonical labeling とする. k の帰納法で G_k が以下の様に grid 上に fráy embedding 可能である事を示す.

1. v_1 は $(0, 0)$ に, v_2 は $(2k - 4, 0)$ に存在する.
2. $w_1 = v_1, \dots, w_m = v_2$ を G_k の exterior face とし, $\chi(w_i)$ を w_i の x 座標とすると,

$$\chi(w_1) < \chi(w_2) < \dots < \chi(w_m).$$
3. $1 \leq i < m$ に対して, 辺 (w_i, w_{i+1}) は $+1$ か -1 の傾きを持つ.

G_k が上記の様に fráy embedding されているとする. ここで, G_k の埋め込みを少し変え, さらに v_{k+1} に座標を与える事によって, G_{k+1} を上記の条件を満たす様に埋め込む. $w_p, w_{p+1}, \dots, w_q, (1 \leq p < q \leq m)$ を $N_{G_{k+1}}(v_{k+1})$ の頂点とする. $w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_m$ を x 軸方向に 1 平行移動させ, さらに, $w_q, \dots, w_m$ を x 軸方向に 1 平行移動させる. このとき w_p を通る傾き 1 の直線と w_q を通る傾き -1 の直線の交点を v_{k+1} の座標とすると, (iii) より任意の i, j に対して, w_i と w_j の x 座標の差と y 座標の差 (マンハッタン距離) は和は偶数なので, v_{k+1} は grid 上の頂点となる. しかし, G_{k+1} が fráy embedding を保つ為に, 他にいくつかの頂点を移動する必要があるかもしれない.

そこで, G_k の exterior face の各頂点 w_i に対して, 以下の様な条件を満たす集合 $M(k, w_i) \subseteq V(G)$ を考える.

- (a) $w_j \in M(k, w_i)$ でありかつそのときに限り $j \geq i$.
- (b) $M(k, w_1) \supset M(k, w_2) \supset \dots \supset M(k, w_m)$.

- (c) 任意の非負整数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ とすべての $1 \leq i \leq m$ に対して, $M(k, w_i)$ を x 軸方向に α_i 平行移動させても G_k は fráy embedding を保つ.

$k = 3$ に対して, v_1 は $(0, 0)$, v_2 は $(2, 0)$, v_3 は $(1, 1)$ とし, $M(3, w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $M(3, w_2) = \{w_2, w_3\}$, $M(3, w_3) = \{w_3\}$ とすれば良い.

k まで (i), (ii), (iii), (a), (b), (c) が成り立つし, $k+1$ のときも成り立つ事を示す. (c) より $\alpha_{p+1} = \alpha_q = 1$ かつ他の $\alpha_i = 0$ として G_k の新しい fráy embedding を得る. このとき w_p と w_q のマンハッタン距離は偶数なので, w_p を通る傾き 1 の直線と w_q を通る傾き -1 の直線の交点を v_{k+1} の座標とすると, v_{k+1} は grid 上の頂点となる. G_{k+1} の fráy embedding が (i), (ii), (iii) を満たすのは明らか. G_{k+1} の exterior face の各頂点 w' に対して, $M(k+1, z)$ を以下の様に定義すると帰納法の仮定より (a), (b), (c) を満たす.

$$\begin{aligned} M(k+1, w_i) &= M(k, w_i) \cup \{v_{k+1}\} & \text{for } i \leq p \\ M(k+1, w_{k+1}) &= M(k, w_{p+1}) \cup \{v_{k+1}\} \\ M(k+1, w_j) &= M(k, w_j) & \text{for } j \geq q \end{aligned}$$

□

4 球面

4.1 定義

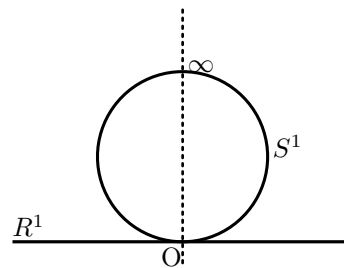
n 次元球面は以下で定義される.

$$\begin{aligned} S^n &= (x_0, x_1, \dots, x_n) & s.t. \\ x_0, x_1, \dots, x_n &\in \mathbb{R} \\ x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 &= 1 \\ S^n &\text{は } n \text{ 次元球面} \end{aligned}$$

4.1.1 球面とユークリッド空間の関係

$\infty \in S^n$ は無限遠の 1 点

$$R^n \cup \{\infty\} = S^n$$



5 結び目

5.1 定義

$$K : S^1 \rightarrow S^3$$

K は $Knot$

5.2 ダイアグラム

結び目を 2 重点のみを持つように射影し、各交差の辺に上下の情報を加えた図をダイアグラムとする。

6 結び目理論の基本的問題

6.1 同型の定義

$$K, K' : Knot$$

$$\forall x \in K$$

$$\exists h(x) \in K'$$

$$s.t. \quad h : S^3 \rightarrow S^3$$

$$\implies K, K' \text{ は同型}$$

6.2 同型判定

同型判定は結び目理論の基本的問題のひとつである。

6.3 同型の直観的イメージ

結び目は伸縮自在なゴム紐のようなものとして想像される。伸ばす。縮める。ひねる。絡ませる。などの変形によって作ることのできる結び目は全て同型な結び目とすることができる。

6.4 自明な結び目

$$K : Knot$$

$$K \subset S^2$$

$$\implies K \text{ は自明}$$

交差や絡みを持たないことが自明のイメージである。

6.5 自明性判定

自明性判定は結び目理論の基本的な問題のひとつである。自明性判定は自明な結び目との同型判定と考えることができる。

7 複体

7.1 単体

$r+1$ 個の位置ベクトル $\forall a_0, a_1, \dots, a_r \in R^n$ を各々 S^n の $r-1$ 次元以下の部分空間に含まれないとする。

$$\left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0 \right\}$$

を n 次元単体と呼ぶ。

7.1.1 n 次元単体の例

代表的な n 次元単体は次の図形である。

0 次元単体：点

1 次元単体：線分

2 次元単体：三角形

3 次元単体：四面体

4 次元単体：五胞体

7.2 定義

以下を満たすとき K は n 次元複体である。

1) 有限個の n 次元単体からなる

2) $\alpha \in K, \delta \in \alpha$

s.t.

$\alpha : n$ 次元単体

$\delta : n$ 次元未満の単体

$\implies \delta \in K$

3) $\forall \alpha, \beta \in K$

s.t.

$\alpha, \beta : n$ 次元単体

$\delta = \alpha \cap \beta$

$\implies \delta : n$ 次元未満の単体

7.2.1 n 次元複体のイメージ

n 次元複体は n 次元単体を密に並べたもののように見える。

8 近傍

8.1 空間の表現

空間に含まれる線分の集合として結び目を描く。

8.2 定義

近傍は結び目に隣接した 3 次元単体の集合である。

9 重心細分

9.1 分割

次を満たす $\{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ は I の分割である.

- 1) $\Delta_i \in I$
 $s.t. \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$
- 2) $\Delta_i \cap \Delta_j = \phi$
 $s.t. i \neq j, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$
- 3) $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n = I$

9.2 重心

r 次元単体の重心は $\frac{\sum_{i=0}^r a_i}{r}$ 記号 g で表す.

9.3 三角形への重心細分

9.3.1 記号の定義

位置ベクトル a, b, c により定義した 2 次元単体を Δabc と表す.

その重心は $\frac{a+b+c}{3}$ である.

9.3.2 定義

$\Delta a \frac{a+b}{2} g, \Delta a \frac{c+a}{2} g, \Delta b \frac{b+c}{2} g, \Delta b \frac{b+a}{2} g, \Delta c \frac{c+a}{2} g, \Delta c \frac{b+c}{2} g$ は Δabc の分割である.
 それらを Δabc の重心細分と呼ぶ.

9.4 四面体への重心細分

位置ベクトル a, b, c, d により定義される 3 次元単体の重心は $\frac{a+b+c+d}{4}$ である.

a, b, c, d により定義される 3 次元単体は $\Delta abc, \Delta abd, \Delta acd, \Delta bcd$ を含んでいる.

$\Delta abc, \Delta abd, \Delta acd, \Delta bcd$ を重心細分することで得られた各 2 次元複体の各頂点へのベクトルと 3 次元複体の重

心へのベクトルにより新たな 3 次元複体を定義できる.
 その集合は a, b, c, d により定義される 3 次元単体の分割になっている.

その集合を a, b, c, d により定義される 3 次元単体の重心細分と呼ぶ.

9.5 近傍と重心細分

Hass *et al.* は結び目を含む空間全体を 2 回重心細分してから近傍を考えている.?

10 ソフトウェアについて

10.1 入力

結び目をダイアグラムにより入力する.

10.2 出力

入力された結び目の近傍の映像をウィンドウ上に出力する.

10.3 開発言語

C++

出力するために OpenGL を利用.

参考文献

H.DE FRAYSSEIX, J.PACH and R.POLLACK
 HOW TO DRAW A PLANAR GRAPH ON A GRID
 (1990)

Joel Hass, Jeffrey C. Lagarias and Nicholas Pippenger,
 "The Computational Complexity of Knot and Link Problems" Journal OF THE ACM Vol. 46 pp.185-211 (March 1999)